江苏大学
硕士研究生入学考试样题

A卷

科目代码：601
科目名称：数学分析　　　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、计算（6X5 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=$______

(2) $\int\dfrac{x^4}{1+x^2}dx=$______

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$ 的收敛区间为______

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx=$______

(5) 过点 $(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程为______

(6) 若 $e^y+xy=e$，则 $y'(0)=$______

二、（10 分）讨论函数 $y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

三、（10 分） 设 $f(x),g(x)$ 分别是 $\Re$ 上的有界一致连续函数，证明 $f(x)\cdot g(x)$ 在 R 上一致连续。

四、（10 分）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a)=f(b)=0$. 证明对任意 $\lambda\in\Re$，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$.

五、（10 分）证明不等式：$\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$。

六、(10 分) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛。其逆命题是否成立？若不成立，给出反例。

七、(10 分) 设 φ 为任意的可微函数，证明方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c.$

八、(10 分) 求由锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$,平面 $z=0$ 以及圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的立体体积。

九、(10 分) 计算曲线积分 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是圆周上 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧。

十、(10 分) 证明：若在 $[a,b]$ 上，函数列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 都连续，且 $S_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)dx$.

十一、(10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数列,且存在常数 $M>0$,对所有的 n 和 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $|f_n'(x)|\le M$. 假设对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=g(x)$，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

十二、(10 分) 计算第二型曲面积分 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，并取外侧为正向。

十三、(10 分) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$ ，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\ge\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。