长沙理工大学

2015 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学物理方程 考试科目代码：813

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、填空题（共 5 题，每小题 6 分，共 30 分）

1、说明物理现象初始状态的条件叫（__________），说明边界上的约束情况的条件叫（__________），二者统称为（____________）。

2、三维热传导齐次方程的一般形式是：（_____________）。

3、在平面极坐标系下，拉普拉斯方程算符为（____________）。

4、边界条件 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_{s}=f$ 是第（___________）类边界条件，其中 S 为边界.

5、二维拉普拉斯方程的基本解是（__________）.

二、 选择题（5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

6、 微分方程 $u_{xxx}+u_{xyy}-\sin u=\ln(1+x^2)$ 是（ ）

(A) 三阶线性偏微分方程 (B) 三阶非线性偏微分方程

(C) 三阶线性齐次常微分方程 (D) 三阶非线性常微分方程

7、 拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的一个解是（ ）

(A) $u(x,y)=e^x\sin xy$ (B) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(C) $u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (D) $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

8、一细杆中每点都在发散热量，其热流密度为 $F(x,t)$,热传导系数为 k，侧面绝热，体密度为 ρ,比热为 c，则热传导方程是（　　）

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x,t)}{c\rho}$　(B) $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x,t)}{c\rho}$

(C) $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{u(x,t)}{c\rho}$　(D) $\frac{\partial F}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{u(x,t)}{c\rho}$　(其中 $a^2=\frac{k}{c\rho}$)

9、理想传输线上电压问题 $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(x,0)=A\cos\omega x,\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=aA\omega\sin\omega x\end{cases}$

(A) $u(x,t)=A\cos\omega(x+at)$　(B) $u(x,t)=A\cos\omega x\cos a\omega t$

(C) $u(x,t)=A\cos\omega x\sin a\omega t$　(D) $u(x,t)=A\cos\omega(x-at)$

10. 单位半径的圆板的热传导混合问题

$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho})\quad(\rho<1)\\ u(1,t)=0,\quad |u(\rho,t)|<M,\quad u(\rho,0)=f(\rho)\end{cases}$ 有形如（　　）的级数解。

(A) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\beta_n^2 t}\sin\beta_n\rho$.　(B) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\beta_n^2 t}\cos\beta_n\rho$

(C) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\beta_n^2 t}J_0(\beta_n\rho)$　(D) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\beta_n^2 t}J_n(\beta_n\rho)$

三、计算题（6 小题，每小题 15 分，共 90 分）

11、求问题的解（15 分）：

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ u(x,0)=8e^{3x}\end{cases}$$

12、试用分离变量法求以下定解问题（15 分）：

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},0<x<3,t>0\\ u\big|_{x=0}=0,\qquad u\big|_{x=3}=0,\\ u\big|_{t=0}=3x,\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=0,0<x<3\end{cases}$$

13、求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\sin x \\ u|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

14、用分离变量法求下面问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bshx \\ u|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

15、解问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \\ u|_{t=0} = x + 2y + 3yz, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{t=0} = 6y^2 \end{cases}$

16、用分离变量法解下列混合问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 2x(\pi -)x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 3\sin 2x \end{cases}$$