长 沙 理 工 大 学

2016 年硕士研究生复试考试试题

考试科目：实变函数　　　　考试科目代码：F1001

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、判断（每小题 3 分，共 30 分）

1. 可数集合和它的任何真子集对等。（ ）

2. 在所有的无限集中，没有最大的基数。（ ）

3. 设 E 是 R^n 中的一个点集，那么，E 的界点不是 E 的聚点便是孤立点。（ ）

4. 紧集不一定是有界集。（ ）

5. 任意多个开集之交仍是开集。（ ）

6. 若 $f_n(x) \geq 0$ 且 $\int_E f_n(x)dx \to 0$，则必有 $f_n(x) \Rightarrow 0$ 。（ ）

7. 单调函数的不连续点的全体至多为一个可数集。（ ）

8. 设 $f(x)$ 在 $E \subset R^n$ 上可测，则 $f(x)$ 可以表示成一列简单函数的极限函数形式。（ ）

9. 勒贝格积分既是黎曼积分的推广，也是黎曼反常积分的推广。（ ）

10. 可数个零测集的并集是零测集，不可数个互不相交的零测集的并集可能是零测集。（ ）

二、（10 分）试找出区间 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 之间 1-1 对应的一种方法（构造 1-1 映射即可）。

三、（15 分）（1）请首先给出 R^1 上开集 G 的构成区间的定义。

（2）设 G_1,G_2 是 R^1 上两个开集，并且有 $G_1 \subset G_2$，证明：G_1 的任意一个构成区间必含在 G_2 的某个构成区间之中。

四、（10 分）试利用卡氏条件证明: 若 R^n 上的点集 E 满足 $m^*(E)=0$，则 E 必是勒贝格可测集。

五、（10 分）设 $f(x)$ 是 $[2,8]$ 上的可导函数，试证明：$f'(x)$ 是 $[2,8]$ 上的可测函数。

六、（10 分）设 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积，$f(x)\geq 0$ 且 $\int_E f(x)dx=0$，

证明：$f(x)=0$ a.e.于 E。

七、（15 分）请先写出勒贝格控制收敛定理的内容，并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^7 nx dx=$