

宁 夏 大 学

2018 年攻读硕士学位研究生入学考试初试试题(A 卷)

考试科目:线性代数 适用专业:数学、学科教学(数学)

(不用抄题,答案写在答题纸上,写明题号,答案写在试题上无效)

一、单项选择题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $|A|=3, A^2 + AB - E = O$, 则行列式 $|A+B|=(\quad)$ 。

- (A) -3 ; (B) 3 ; (C) $-\frac{1}{3}$; (D) $\frac{1}{3}$ 。

2. 设 $\lambda = -2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $2A^{-1} + 3A^2$ 的一个特征值为 (\quad) 。

- (A) 2 ; (B) 3 ; (C) 8 ; (D) 11 。

3. 设 n 阶矩阵 A 的秩 $r < n$, 则在 A 的 n 个行向量中 (\quad) 。

- (A) 必有 r 个行向量线性无关; (B) 任意 r 个行向量线性无关; (C) 任意 r 个行向量可构成极大线性无关组; (D) 任一行向量可由其它 r 个行向量线性表示。

4. 设 A 是 n 阶可逆对称矩阵, B 是 n 阶反对称矩阵, 则下列矩阵不能通过正交变换化为对角形的是 (\quad) 。

- (A) $AB - BA$; (B) $A^T(B^T + B)A$; (C) ABA ; (D) BAB 。

5. 设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, 则秩 $(A) = n$ 是线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解的 (\quad) 。

- (A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充分且必要条件; (D) 非充分非必要条件。

二、填空题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 如果二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + tx_3^2 + 2x_2x_3$ 的秩为 2, 那么 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 向量 $(1, -2, 1, 1)$ 与 $(k, 1, 0, 3)$ 的内积为 3, 那么 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$$
 有解的充分必要条件是: 常数 a_1, a_2, a_3, a_4 满足 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 设 α_1, α_2 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解向量, 则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是方程组_____的解向量。

5. 已知 4 阶矩阵 A 与 B 相似, E 是 4 阶单位矩阵, B 的特征值是 1, 2, 3, 4. 则行列式 $|A^{-1} - E| =$ _____。

6. 在线性空间 $F[X]_3$ 中, 由基 $1, x, x^2$ 到基 $1+x, 2+x+x^2, 3x+2x^2$ 的过渡矩阵是_____。

三、(10 分) 已知 $AB - B = A$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。求 $(A - E)^{-1}$ 。其中 E 是 3 阶单位矩阵。

四、(15 分) 已知 4 阶矩阵 A 的特征值为 $-1, -2, 1, 2$. 矩阵 $B = A^3 + 2A^2 - E$ 。

(1) 求 B 的特征值; (2) 证明 B 可以对角化; (3) 求行列式 $|B + 2E|$ 。

五、(20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, (1) k 取何值时, A 相似于对角矩阵? (2) 求可逆

矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

六、(20 分) 设 n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解, η_0 为其解, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是其导出组的基础解系。证明:

(1) $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关;

(2) $\eta_0, \eta_0 + \eta_1, \eta_0 + \eta_2, \dots, \eta_0 + \eta_t$ 是 $Ax = b$ 的线性无关的解。

七、(15 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 的秩为 3,

(1) 求 a 满足的条件; (2) a 为何值时, 此二次型是正定的?

八、(20 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基, 已知线性变换 A 在这组基下

的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, (1) 求 A 的值域的基和维数。(2) 求 A 的核的基和维

数。