

10. 拉压超静定问题及其处理方法



一、超静定问题及其处理方法

1、超静定问题：单凭静平衡方程不能确定出全部未知力（外力、内力、应力）的问题。

2、产生超静定问题的原因：

*多余约束

*加工误差产生的装配应力

*温度应力

3、超静定的处理方法：

①建立必要的平衡方程

②分析变形，建立变形协调方程（力和变形一致）

③将变形及其物理原因相联系，建立物理方程。

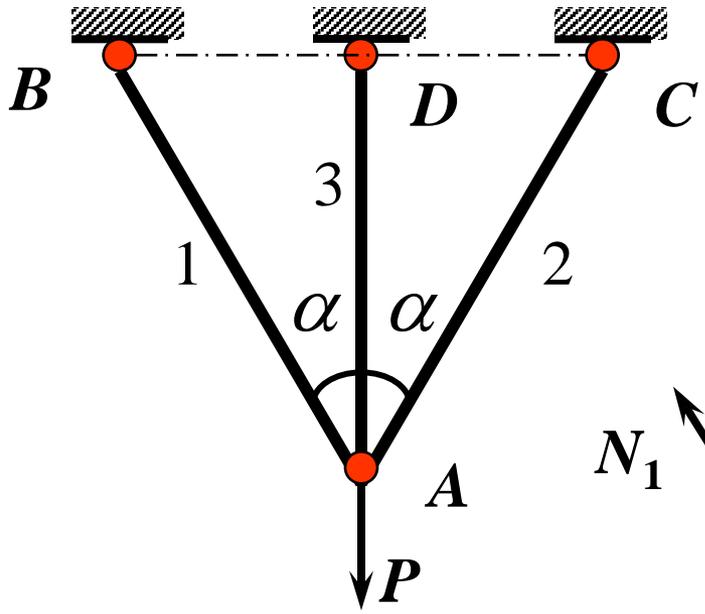
④联合变形协调方程和物理方程，建立补充方程。



二、多余约束引起的超静定问题

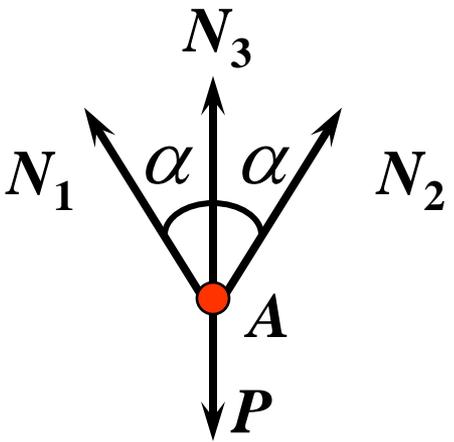
例 设 1、2、3 三杆用铰链连接如图，已知：各杆长为： $L_1=L_2$ 、 $L_3=L$ ；各杆面积为 $A_1=A_2=A$ 、 A_3 ；各杆弹性模量为： $E_1=E_2=E$ 、 E_3 。外力沿铅垂方向，求各杆的内力。

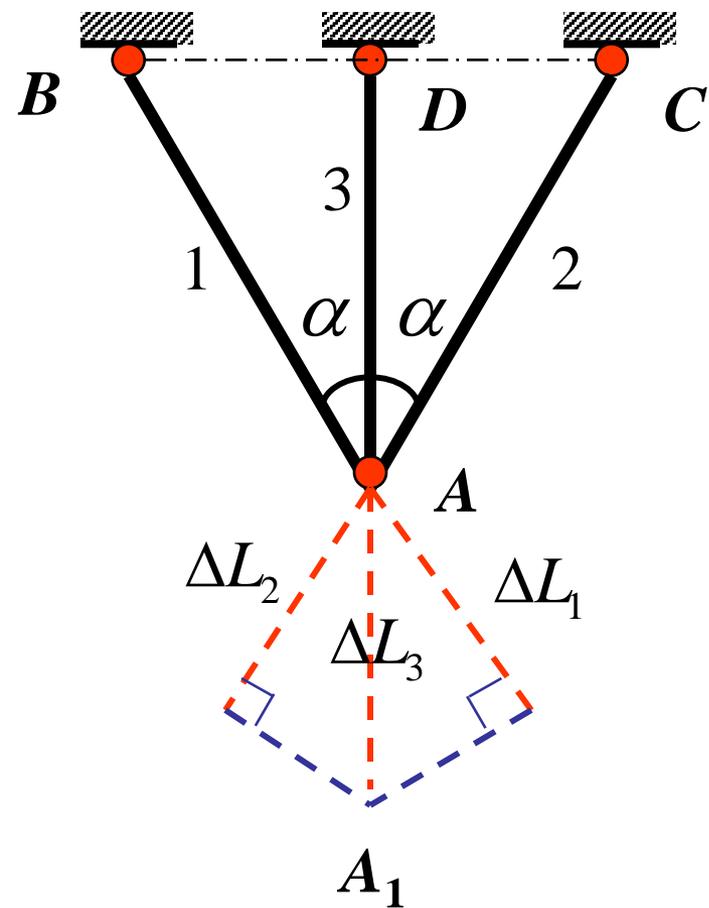
解：①、平衡方程：



$$\sum X = 0 \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - P = 0$$





② 几何方程——变形协调方程:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L_3 \cos \alpha$$

③ 物理方程——胡克定律:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} \quad \Delta L_3 = \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3}$$

④ 补充方程: 由几何方程和物理方程得。

$$\frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3} \cos \alpha$$

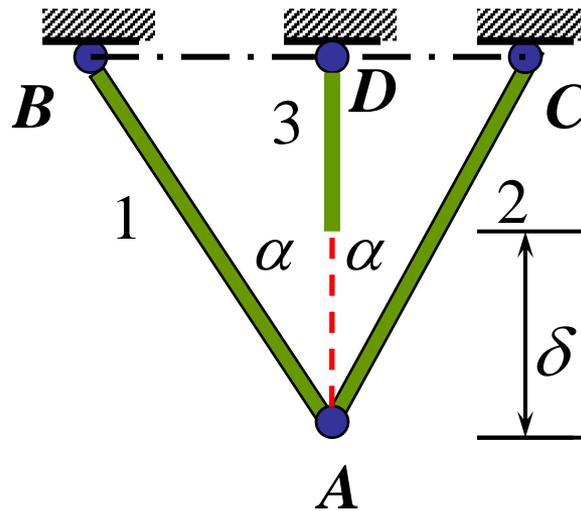
⑤ 解由平衡方程和补充方程组成的方程组, 得:

$$N_1 = N_2 = \frac{E_1 A_1 P \cos^2 \alpha}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3}; \quad N_3 = \frac{E_3 A_3 P}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3}$$

三、由加工误差产生的装配应力——预应力

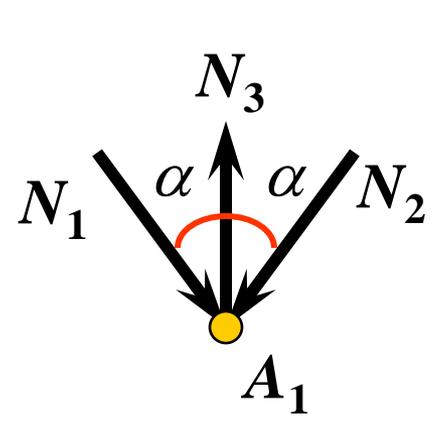
- 1、静定问题无装配应力。
- 2、静不定问题存在装配应力。

如图，3号杆的尺寸误差为 δ ，求各杆的装配内力。





解：①、平衡方程：



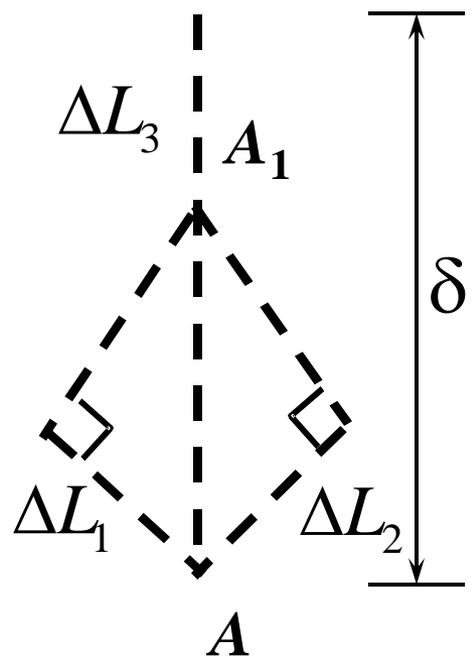
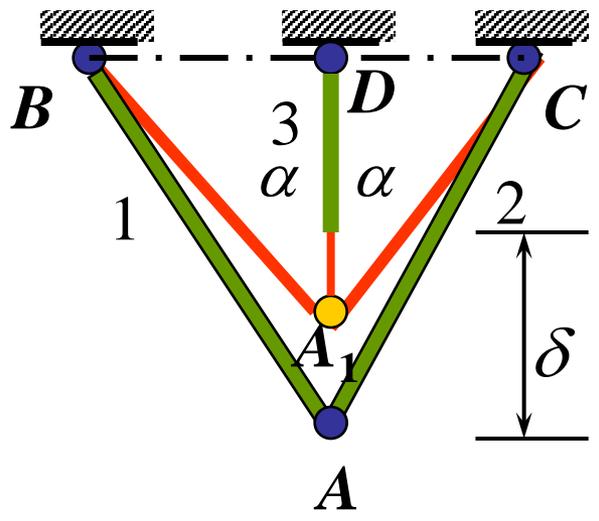
$$\sum X = 0$$

$$-N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0$$

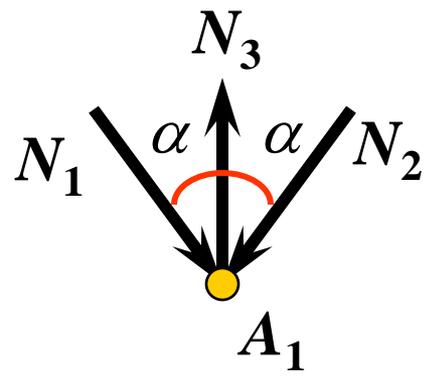
$$\sum Y = 0$$

$$N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - N_3 = 0$$

②、几何方程



$$(\delta - \Delta L_3) \cos \alpha = \Delta L_1$$

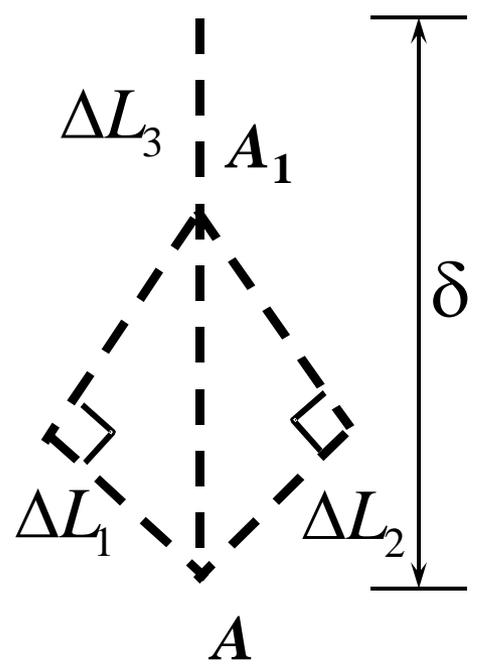


③、物理方程及补充方程：

$$\frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \left(\delta - \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3} \right) \cos \alpha$$

④、解平衡方程和补充方程，得：

$$N_1 = N_2 = \frac{\delta}{L_3} \frac{E_1 A_1 \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3}}$$



$$N_3 = \frac{\delta}{L_3} \frac{2 E_1 A_1 \cos^3 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3}}$$

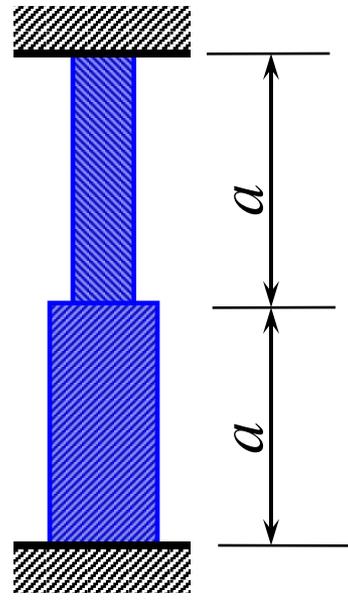


四、温度变化造成的温度应力

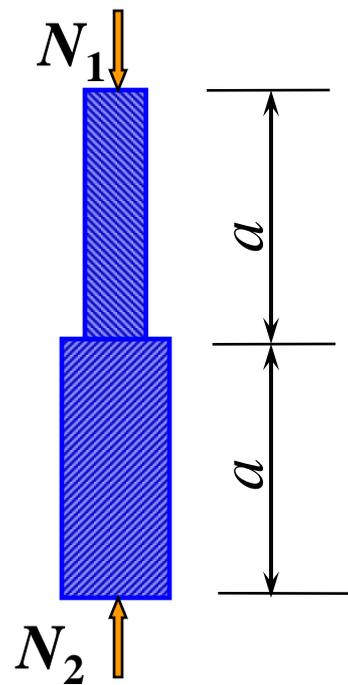


平衡方程： $F_{RA} = F_{RB}$





[例] 如图，阶梯钢杆的上下两端在 $T_1=5^\circ\text{C}$ 时被固定，杆的上下两段的面积分别 $A_1=5\text{cm}^2$ ， $A_2=10\text{cm}^2$ ，当温度升至 $T_2=25^\circ\text{C}$ 时，求各杆的温度应力。
(线膨胀系数 $\alpha=12.5\times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ ；弹性模量 $E=200\text{GPa}$)



解：①、平衡方程：

$$\sum Y = 0 \quad -N_1 + N_2 = 0$$

②、几何方程：

$$\Delta L = \Delta L_T - \Delta L_N = 0$$



③、物理方程

$$\Delta L_T = 2a\Delta T\alpha; \quad \Delta L_N = \frac{N_1 a}{EA_1} + \frac{N_2 a}{EA_2}$$

④、补充方程

$$2\Delta T\alpha = \frac{N_1}{EA_1} + \frac{N_2}{EA_2}$$

解平衡方程和补充方程，得： $N_1 = N_2 = 33.3kN$

⑤、温度应力

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 66.7MPa \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 33.3MPa$$