二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

按照《九章算术》上提供的求解方法：第二个方程乘 a_{11}，得到

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2,$$

二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

按照《九章算术》上提供的求解方法：第二个方程乘 a_{11}，得到

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2,$$

再减去第一个方程的 a_{21} 倍，则得到

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 - a_{21}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2\right) = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

按照《九章算术》上提供的求解方法：第二个方程乘 a_{11}，得到

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2,$$

再减去第一个方程的 a_{21} 倍，则得到

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 - a_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

所以

定理

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，$\begin{cases} x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$。

二阶行列式

前一页得到的方程为：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

- 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 时，

二阶行列式

前一页得到的方程为：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

- 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ 时，
  - 若 $a_{11}b_2-a_{21}b_1\neq 0$ 则方程组无解；

二阶行列式

前一页得到的方程为：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

- 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 时，
  - 若 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0$ 则方程组无解；
  - 若 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$ 时，第二个方程是第一个方程的倍式，所以方程组有无穷组解！。

二阶行列式

前一页得到的方程为：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

- 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ 时，
  - 若 $a_{11}b_2-a_{21}b_1\neq 0$ 则方程组无解；
  - 若 $a_{11}b_2-a_{21}b_1=0$ 时，第二个方程是第一个方程的倍式，所以方程组有无穷组解！。
- 这说明 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是否等于零能决定（ determine ）方程组是不是有唯一解！是一个起决定意义的数，称为方程组系数列的 2 阶行列式（英文 determinant，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}。$$

二阶行列式

前一页得到的方程为:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

- 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ 时,
  - 若 $a_{11}b_2-a_{21}b_1\neq 0$ 则方程组无解;
  - 若 $a_{11}b_2-a_{21}b_1=0$ 时，第二个方程是第一个方程的倍式，所以方程组有无穷组解！。
- 这说明 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是否等于零能决定（ determine ）方程组是不是有唯一解！是一个起决定意义的数，称为方程组系数列的 2 阶行列式（英文 determinant，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}。$$

- 对由三个三元一次方程构成的方程组，是不是也有这样的做法呢？《九章算术》告诉我们，也可以这样进行。

三阶行列式

通过从第二个方程中减去第一个方程的适当倍数，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

得到 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$；对三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3 \end{cases},$$

当实施类似的处理时，也可得到

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{31} & y_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

再利用前面得到的二元一次方程组的解，得到

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{31} & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

从而得到

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31})\, x_3 \\ = \; & (y_1a_{21}a_{32} - y_1a_{22}a_{31} - y_2a_{11}a_{32} + y_2a_{12}a_{31} + a_{11}y_3a_{22} - y_3a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

所以，定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

为三阶行列式（determinant）。
它和二阶行列式在定义概念时的情形基本上一致，即能决定方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3 \end{cases}$ 是不是对任意的 y_1, y_2, y_3 都有唯一解；
三阶行列式还可由如下步骤来产生（从二元一次方程的消元得到）：
对 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 消元 x_1，$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

对 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 消元 x_1，$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

所以 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

1. 第一、二消

得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

对 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 消元 x_1，$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

所以 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

1. 第一、二消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

2. 第一、三消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

对 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 消元 x_1，$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

所以 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

1. 第一、二消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad (1)$$

2. 第一、三消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

3. 第二、三消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

对 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 消元 x_1，$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

所以 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

1. 第一、二消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad (1)$$

2. 第一、三消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

3. 第二、三消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$(1) \times a_{33} - (2) \times a_{23} + (3) \times a_{13} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

这样 x_2 前面的系数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

同理，$(1)\times a_{32}-(2)\times a_{22}+(3)\times a_{12} \Rightarrow$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = -a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

这又意味着

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由此启发，若我们考虑 n 个方程的 n 元一次方程组时有没有类似的结论？这自然需要引进 n 阶行列式的概念。

14.1 行列式的概念与性质

行列式定义：由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式是一个算式，其结果是一个数。记为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

两种计算方式：

（1） $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$
$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$

$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排序，注意和式中有 $n!$ 项。