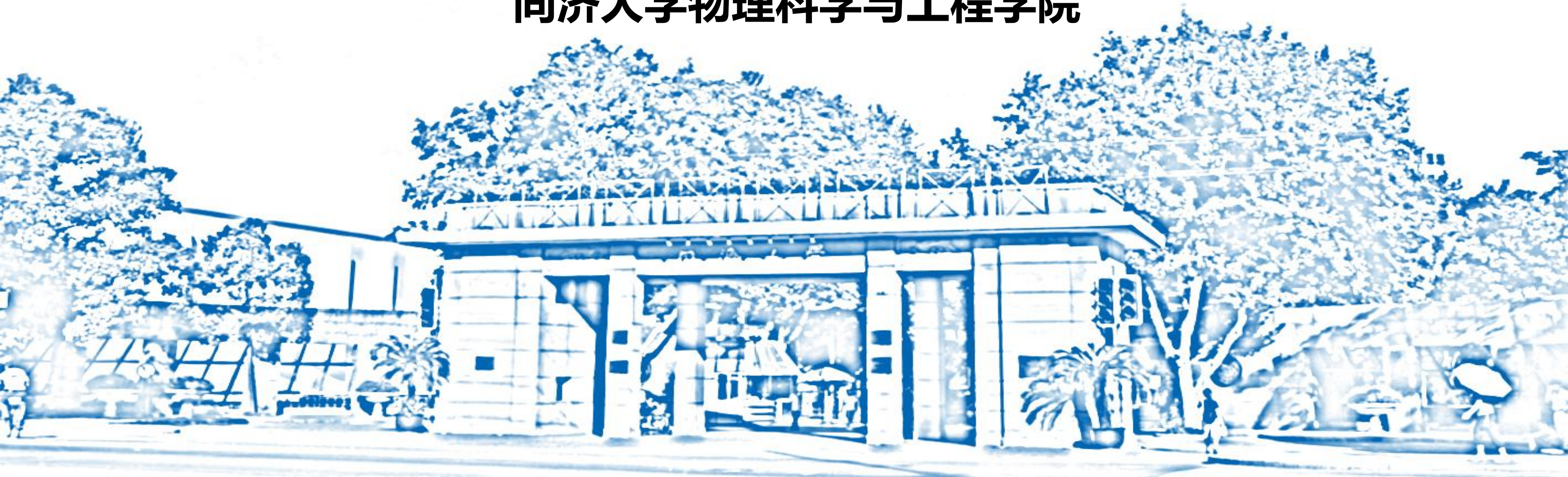
电动力学
Electrodynamics

谢双媛
同济大学物理科学与工程学院



第四章 电磁波的传播

第四章 电磁波的传播

§5 波导

内 容 概 要

1. 高频电磁波能量的传输
2. 矩形波导中的电磁波
3. 截止频率
4. TE_{10}波的电磁场和管壁电流

一、高频电磁能量的传输

近代无线电技术利用高频电磁波，需要研究高频电磁能量的传输问题，不同于低频传输问题.

在所有情况下，能量都是在场中传播的.

低频----场与线路中电荷和电流的关系简单，场在线路中的作用可以通过线路的一些参数（电压、电流、电阻、电容和电感等）表示出来.

高频----场的波动性显著，电容、电感等概念不适用，整个线路上的电流具有波动性质，电压的概念失去确切意义。在高频情况下，电路方程逐渐失效，直接研究场和线路上的电荷电流的相互作用，解出电磁场，才能解决电磁能量传输问题.

二、矩形波导中的电磁波

波导是一根空心金属管, 截面通常为矩形或圆形.

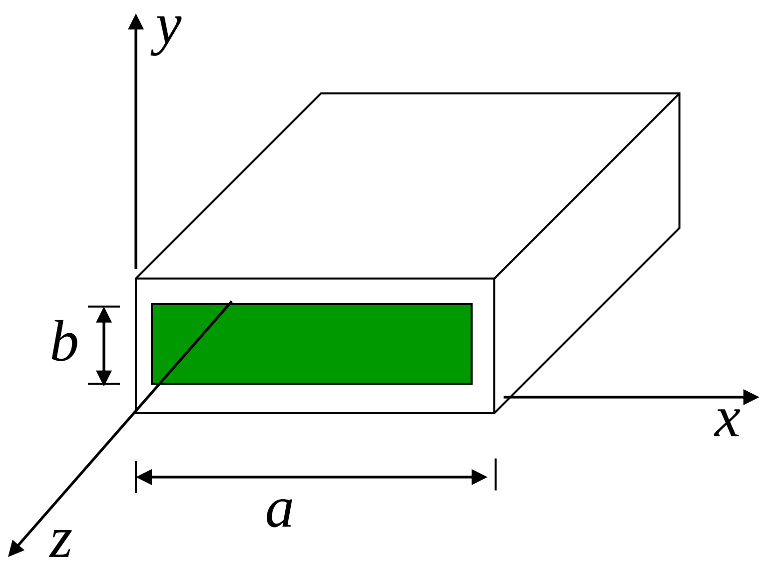
直角坐标系中波导内壁面为x=0和a, y=0和b; z轴沿传播方向.
在一定频率下, 管内电磁波是亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

满足条件 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 的解. 此解在管壁上还需满足边界条件

$$\vec{n}\times\vec{E}=0$$



$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y)e^{ik_z z-i\omega t}$$

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)e^{ik_z z}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{E}(x,y)+\left(k^2-k_z^2\right)\vec{E}(x,y)=0$$

用直角坐标分离变量 $u(x,y)=X(x)Y(y)$

$$u(x,y)=\left(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x\right)\left(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y\right)$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

$$\vec{n}\times\vec{E}=0 \qquad E_y=E_z=0,\ \frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \quad (x=0,a)$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial n}=0 \qquad E_x=E_z=0,\ \frac{\partial E_y}{\partial y}=0 \quad (y=0,b)$$

由x=0和y=0面上的边界条件可得

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A_1\cos k_x x\sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y &= A_2\sin k_x x\cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z &= A_3\sin k_x x\sin k_y y e^{ik_z z} \end{aligned}\right)$$

x=a和y=b面上的边界条件

$$k_x=\frac{m\pi}{a}, \qquad k_y=\frac{n\pi}{b}, \qquad m,n=0,1,2\cdots$$

由条件 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$,可得条件

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0 \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

A_1, A_2和A_3中只有两个是独立的.

对于每一(m,n)值,有两种独立波模.

$$\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$$

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0$$ 两种独立的基本波模.

在波导内传播的波有如下特点: 电场E和磁场H不能同时为横波.

横电波(TE)：**电**场方向垂直于传播方向，

$$E_z = 0 \quad H_z \neq 0 \qquad A_2 = -\frac{k_x}{k_y} A_1 \qquad A_3 = 0$$

横磁波(TM) ：**磁**场方向垂直于传播方向，

$$H_z = 0 \qquad E_z \neq 0 \qquad A_2 = \frac{k_y}{k_x} A_1 \qquad A_3 = -i\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x k_z} A_1$$

TE波和TM波又按(m,n)值不同而分为TE_{mn}和TM_{mn}波.

TE、TM波特征证明

横电波(TE)： $E_z = 0, A_3 = 0$ $\quad k_x A_1 + k_y A_2 = 0$

$$H_z = \frac{i}{\omega\mu}\left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right] = \frac{i}{\omega\mu}(A_1 k_y - A_2 k_x)\cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{ik_z z}$$

$H_z \neq 0$ 若不然，则必须: $k_x = k_y = 0$

$$A_2 = -\frac{k_x}{k_y}A_1 \qquad A_3 = 0$$

横磁波(TM) ： $H_z = 0, \quad A_1 k_y - A_2 k_x = 0$

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0$$

$E_z \neq 0$ 若不然，则必须: $k_x = k_y = 0$

$$A_2 = \frac{k_y}{k_x}A_1 \qquad A_3 = -i\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x k_z}A_1$$

三、截止频率

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon \qquad k_x=\frac{m\pi}{a},\quad k_y=\frac{n\pi}{b}$$

若激发频率降低到 $k<\sqrt{k_x^2+k_y^2}$,则k_z变为虚数,这时传播因子 e^{ik_zz} 变为衰减因子.

波模的**截止频率**：能够在波导内传播的波的最低频率ω_c.

(m, n)型的截止角频率为 $\boxed{k_z^2=0}$

$$\omega_{c,mn}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{k_x^2+k_y^2}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$\lambda_{c,mn}=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega_{c,mn}}=\frac{2}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{1/2}}$$

波长$\lambda>\lambda_{c,mn}$的电磁波不能以TE_{mn}或TM_{mn}模式在波导中传播。

若$a>b$, 则TE_{10}波有**最低截止频率**

$$\frac{1}{2\pi}\omega_{c,10}=\frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

若管内为真空, 最低截止频率为$c/2a$, 相应的**截止波长**为

$$\lambda_{c,10}=2a$$

- 波长大于2a的电磁波不能在波导中传播
- 如何让电磁波在波导中以单一种模式传播

对给定频率的电磁波ω，设计波导尺寸，使之满足：

$$\omega_{c,10}<\omega<\min\left\{\omega_{c,20},\omega_{c,11}\right\}$$

四、TE_{10}波的电磁波和管壁电流

对TE波，管内空间各点 $E_z = 0 \quad \Rightarrow A_3 = 0$

$$m = 1, n = 0 \quad \Rightarrow k_y = 0$$

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0 \quad \Rightarrow A_1 = 0 \quad \Rightarrow E_x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{aligned}\right) \qquad \vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$$

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{iA_2}{\omega\mu} k_x \cos(k_x x) e^{ik_z z} = -\frac{i\pi A_2}{\omega\mu a}\cos(k_x x) e^{ik_z z}$$

$$= H_0 \cos\frac{\pi}{a} x e^{ik_z z} \qquad H_0 = -\frac{i\pi A_2}{\omega\mu a}$$

$$H_x = \frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{ik_z z} \qquad H_y = 0$$

TE_{10}波的电磁波

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{ik_z z}$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{ik_z z}$$

$$H_x = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{ik_z z}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{\alpha}$$

TE_{10}波的电磁波

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{ik_z z}$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{ik_z z}$$

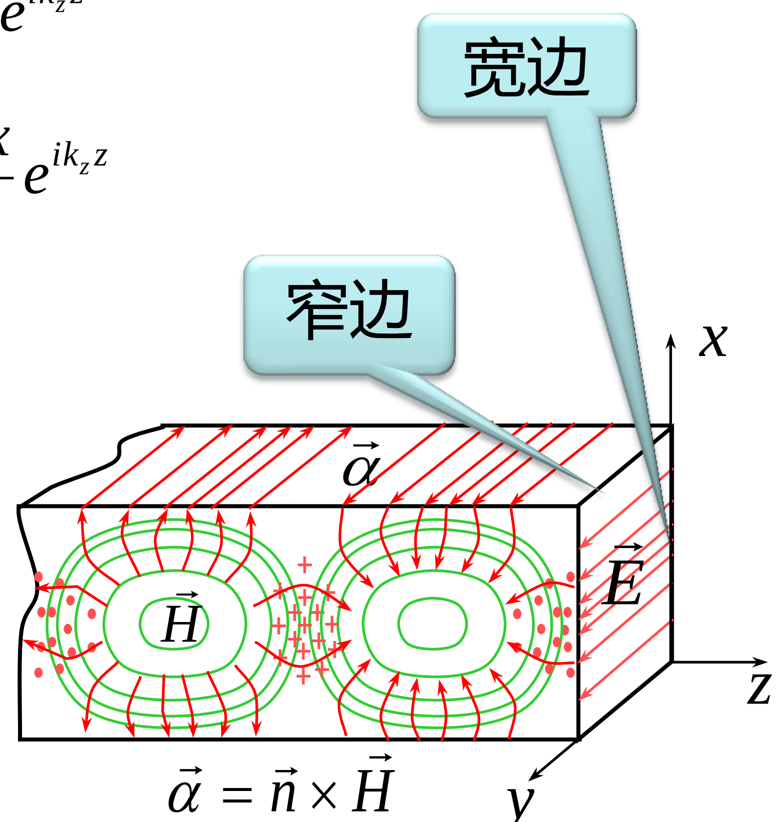
$$H_x = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{ik_z z}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

$$\vec{n}\times\vec{H} = \vec{\alpha}$$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{ik_z z} = 0$$

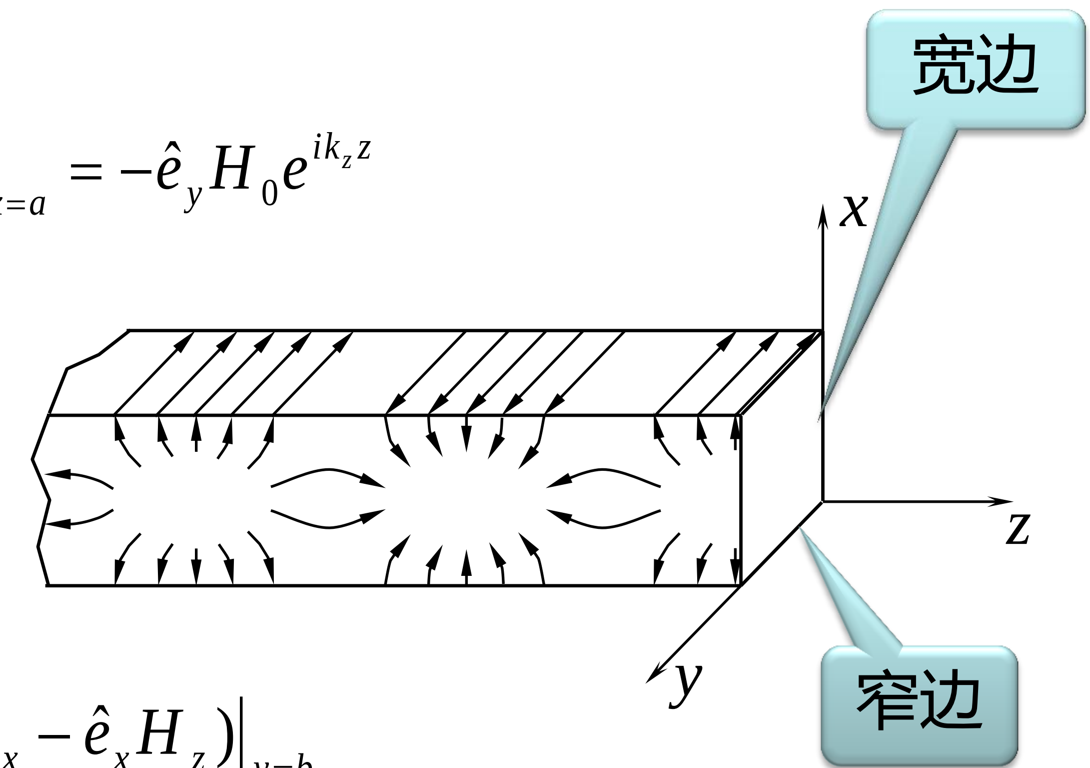


$$\vec{\alpha} = \vec{n}\times\vec{H} = (-\vec{e}_y)\times(H_x\vec{e}_x + H_z\vec{e}_z) = -H_x\vec{e}_z$$

在$x=a$面上 $\vec{n}=-\hat{e}_x$

$$\vec{a}\Big|_{x=a}=-\hat{e}_x\times\vec{H}=\hat{e}_y H_z\Big|_{x=a}$$

$$=\hat{e}_y\left(H_0\cos\frac{\pi}{a}x e^{ik_z z}\right)\Big|_{x=a}=-\hat{e}_y H_0 e^{ik_z z}$$



在$y=b$面上 $\vec{n}=-\hat{e}_y$

$$\vec{a}\Big|_{y=b}=-\hat{e}_y\times\vec{H}\Big|_{y=b}=(\hat{e}_z H_x-\hat{e}_x H_z)\Big|_{y=b}$$

$$=-\left(\hat{e}_x H_0\cos\frac{\pi}{a}x+\hat{e}_z\frac{ik_z a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\right)e^{ik_z z}$$