

# 11

## 积分变换法

积分变换在求解微分方程中最大的好处是将微分方程化为代数方程，从而可以轻易地求出函数的积分变换。  
当然，求得函数的积分变换后，还得做反变换才能得到函数本身。  
本章以Fourier变换为例，讨论积分变换在求解数理方程中的应用。

### 11.1 Fourier变换法

#### Fourier变换

通过一些例题讨论Fourier变换在求解数理方程中的应用。在这里我们均假设所求函数满足Fourier变换的条件。

例 1. 一维无界弦横振动的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

这个问题已在上一章用行波法求解，其解由 D'Almebert 公式给出

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

解：首先，应对那一个变量做Fourier变换？

$-\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty$ ：因而，常对  $x$  做Fourier变换，

当然有时也对  $t$  做Fourier变换，但后者需要延拓至双无穷  $(-\infty, +\infty)$ 。

对泛定方程的  $x$  变量做Fourier变换：

$$\mathcal{F}[u(x, t)] = \tilde{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx$$

利用微分定理： $\mathcal{F}[u_{xx}(x, t)] = (ik)^2 \tilde{u}(k, t) = -k^2 \tilde{u}(k, t)$

$$\text{对初始条件做Fourier变换：} \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{u}(k, 0) = \tilde{\varphi}(k) \\ \tilde{u}_t(k, 0) = \tilde{\psi}(k) \end{cases}$$

定解条件变为： $\begin{cases} \tilde{u}_t(k, t) + a^2 k^2 \tilde{u}(k, t) = 0 \\ \tilde{u}(k, 0) = \tilde{\varphi}(k) \\ \tilde{u}_t(k, 0) = \tilde{\psi}(k) \end{cases}$  问题退化为：给定初条的二阶线性常系数常微分方程

$$\implies \begin{cases} \tilde{u}(k, t) = A(k) e^{ik at} + B(k) e^{-ik at} \\ \text{由初条：} A(k) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\varphi}(k) + \frac{\tilde{\psi}(k)}{i k a} \right], B(k) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\varphi}(k) - \frac{\tilde{\psi}(k)}{i k a} \right] \end{cases}$$

$$\text{故：} \tilde{u}(k, t) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\varphi}(k) + \frac{\tilde{\psi}(k)}{i k a} \right] e^{ik at} + \frac{1}{2} \left[ \tilde{\varphi}(k) - \frac{\tilde{\psi}(k)}{i k a} \right] e^{-ik at}$$

$$\text{做反Fourier变换: } u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi) d\xi$$

其中利用了

$$\text{积分定理: } \int_{-\infty}^x f(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{ik} \tilde{f}(k) \quad \text{或写成: } \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{ik} \tilde{f}(k)\right] = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\text{延迟定理: } f(x+x_0) \leftrightarrow e^{ikx_0} \tilde{f}(k) \quad \text{或写成: } \mathcal{F}^{-1}[e^{ikx_0} \tilde{f}(k)] = f(x+x_0)$$

$$\text{位移定理: } \tilde{f}(k+k_0) \leftrightarrow e^{-ik_0x} f(x) \quad \text{或写成: } \mathcal{F}[e^{-ik_0x} f(x)] = \tilde{f}(k+k_0)$$

$$\text{思考: } \mathcal{F}\left[\frac{1}{ix} f(x)\right] = ? \quad \mathcal{F}[ix f(x)] = ? \quad \text{与 } \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{ik} \tilde{f}(k)\right] \text{ 和 } \mathcal{F}^{-1}[ik \tilde{f}(k)] \text{ 有何关系}$$

$$(\text{做变换: } \mathcal{F}^{-1} \leftrightarrow \mathcal{F}, \quad x \leftrightarrow k, \quad i \leftrightarrow j = -i, \quad f(x) \leftrightarrow \tilde{f}(k))$$

先利用延迟定理, 再利用积分定理

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\tilde{\psi}(k)}{ik} e^{ik at}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\tilde{\psi}(k)}{ik}\right] \Bigg|_{x \rightarrow x+at} = \left[\int_{-\infty}^x \psi(\xi) d\xi\right] \Bigg|_{x \rightarrow x+at} = \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

先利用积分定理, 再利用延迟定理

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\tilde{\psi}(k) e^{ik at}}{ik}\right] = \int_{-\infty}^x \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}(k) e^{ik at}] d\xi = \int_{-\infty}^x \psi(\xi + at) d\xi = \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

## 例 2. 无界细杆的传热

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t) & -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad \text{此问题无法用行波法求解}$$

解: 对泛定方程的  $x$  变量做 Fourier 变换:

$$\text{定解条件变为: } \begin{cases} \tilde{u}_t(k, t) + a^2 k^2 \tilde{u}(k, t) = \tilde{f}(k, t) \\ \tilde{u}(k, 0) = \tilde{\varphi}(k) \end{cases} \quad \text{非齐次常微分方程}$$

$$\text{先求齐次方程的解: } \tilde{u}_t(k, t) + a^2 k^2 \tilde{u}(k, t) = 0 \rightarrow \tilde{u}_i(k, t) = c(k) e^{-a^2 k^2 t},$$

$$\text{常数变易: } \tilde{u}(k, t) = c(k, t) e^{-a^2 k^2 t} \text{ 代入非齐次方程得: } \frac{\partial c(k, t)}{\partial t} e^{-a^2 k^2 t} = \tilde{f}(k, t)$$

$$\text{从而求出: } c(k, t) = \int_0^t \tilde{f}(k, \tau) e^{a^2 k^2 \tau} d\tau + c(k, 0), \quad \text{由初条: } c(k, 0) = \tilde{u}_i(k, 0) = \tilde{\varphi}(k) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$$

$$\text{从而: } \tilde{u}(k, t) = \left[ \tilde{\varphi}(k) + \int_0^t \tilde{f}(k, \tau) e^{a^2 k^2 \tau} d\tau \right] e^{-a^2 k^2 t}$$

做反Fourier变换,

$$\text{利用卷积定理: } f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow \tilde{f}_1(k) \tilde{f}_2(k)$$

$$\text{以及 } \begin{cases} e^{-a^2 k^2 t} \leftrightarrow \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4a^2 t} \\ \varphi(x) \leftrightarrow \tilde{\varphi}(k) \end{cases}$$

$$\text{这里利用了: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 k^2 t} e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t \left(k - \frac{ix}{2a^2 t}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} dk = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4a^2 t}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4a^2 t} + \mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \tilde{f}(k, \tau) e^{-a^2 k^2(t-\tau)} d\tau\right] \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-(x-s)^2/4a^2 t} ds + \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(k, \tau) e^{-a^2 k^2(t-\tau)}] d\tau \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-(x-s)^2/4a^2 t} ds + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, \tau) e^{-(x-s)^2/4a^2(t-\tau)} ds \end{aligned}$$

来自初始条件的贡献
来自热源  $f(x, t)$  的贡献

例 3. 半无界细杆的传热

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & 0 \leq x < \infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u_0 \end{cases} \quad \text{非齐次边条}$$

解：相比于上一个问题，这是个无热源的问题： $f(x, t) = 0$ ，问题大为简化。

如果是无界细杆，则可直接应用上题结果。对半无界，为应用无界的结果，必须做延拓。

延拓也需要齐次边条，为此，令： $u(x, t) = w(x, t) + u_0$

$$w(x, t) \text{ 满足: } \begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x \geq 0 \\ w(x, 0) = -u_0 & x \geq 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{I 类齐次边条}$$

$$\xrightarrow{\text{I 类齐次边条, 奇延拓}} \begin{cases} W_t - a^2 W_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty \\ W(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \\ W(0, t) = 0 \end{cases}$$

这里类似于波动问题，对 Dirichlet 齐次边条，作奇延拓： $W(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} -u_0, & x > 0 \\ u_0, & x < 0 \end{cases}$

$$\text{现在就可以利用上一题的结果: } W(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-(x-s)^2/4a^2 t} ds,$$

在  $x \geq 0$  区域， $w(x, t) = W(x, t)$  满足  $w(x, t)$  定解条件中的前两个（方程与初条）

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-(x-s)^2/4a^2 t} ds \\ &= u_0 + \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-(x-s)^2/4a^2 t} ds}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-(x-s)^2/4a^2 t} ds}_{I_2} \right] \end{aligned}$$

那么，这种奇延拓能否保证  $w(x, t)$  满足  $w(0, t) = W(0, t) = 0$ ?

- ▲ 从物理上看： $W(x, t)$  对应于无热源（绝热）一无限长细杆的热传导问题，温度分布由初始条件决定

既然初始条件是个奇函数，相对于  $x = 0$  点反对称，

那么，在任何时刻，温度分布都应该是反对称，也即，在  $x = 0$  处，温度为 0。

- ▲ 数学上，易验证： $x = 0$  时， $I_1 = I_2$ ， $u(x, t) = u_0$ ， $w(x, t) = 0$

- ▲ 问题： $t = 0$  时， $u(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow \infty$ ？与原初始条件  $u(0, t) = u_0$  矛盾？非也！

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^0 e^{-(x-s)^2/4a^2 t} ds = 2a\sqrt{t} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{\sqrt{\pi}/2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi, \quad \text{其中: } \xi = \frac{x-s}{2a\sqrt{t}} \\ &= 2a\sqrt{t} \left[ \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}/2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi - \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right] = a\sqrt{\pi t} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right] \end{aligned}$$

其中  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$  为误差函数。

$$I_2 = a\sqrt{\pi t} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right],$$

$$\text{从而: } I_1 - I_2 = -2a\sqrt{\pi t} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

$$u(x, t) = u_0 \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right]$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1 \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0$  的确满足  $u(x, t)$  的初始条件。

例 4. 已知空间电荷分布  $\rho(\vec{r})$  求空间电势。

解：空间电势满足 Poisson 方程： $\nabla^2 u = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$

对空间坐标做三维 Fourier 变换： $\mathcal{F}[u(\vec{r})] = \tilde{u}(\vec{k})$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\nabla u(\vec{r})] &= \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla u(\vec{r})] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \nabla [u(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] - u(\vec{r}) \nabla e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\} d^3\vec{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\nabla u(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{\lim_{r \rightarrow \infty} u(\vec{r}) = 0} d^3\vec{r} - \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{r}) (-i\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} = i\vec{k} \tilde{u}(\vec{k}) \end{aligned}$$

三维： $\mathcal{F}[\nabla u(\vec{r})] = i\vec{k} \tilde{u}(\vec{k})$       比较一维： $\mathcal{F}\left[\frac{du(x)}{dx}\right] = ik \tilde{u}(k)$

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon} \xrightarrow{\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u} (i\vec{k}) \cdot (i\vec{k}) \tilde{u}(\vec{k}) = -k^2 \tilde{u}(\vec{k}) = -\frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{\varepsilon},$$

一维 Fourier 变换： $f'(x) \leftrightarrow ik \tilde{f}(k)$ ;

三维 Fourier 变换： $\nabla f(\vec{r}) \leftrightarrow i\vec{k} \tilde{f}(\vec{k})$ ,  $\nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) \leftrightarrow i\vec{k} \cdot \tilde{\vec{g}}(\vec{k})$ ,  $\nabla \times \vec{g}(\vec{r}) \leftrightarrow i\vec{k} \times \tilde{\vec{g}}(\vec{k})$ ,

其中： $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ ,  $k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ ,

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon} \xrightarrow{\text{三维 Fourier 变换}} \tilde{u}(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon k^2} \tilde{\rho}(\vec{k})$$

做三维反 Fourier 变换，利用  $\frac{1}{k^2} \leftrightarrow \frac{1}{4\pi r}$  (见 § 8.1 节 例题)

$$\text{从而： } u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \overbrace{\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\rho}(\vec{k})] * \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{k^2}\right]}^{\text{三维卷积}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

——“却原来是司马发来的兵”，早已熟知的结果

例 5. 半无界波动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & 0 \leq x < \infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, t) = 0 \\ u(0, t) = f(t) \end{cases} \quad \text{本题已用行波法求解，现用 Fourier 变换法求之。}$$

解：我们只关心  $t \geq 0$  时的振动，延拓： $v(x, t) = u(x, t)H(t)$ ,  $H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$  为阶跃函数

$$v(x, t) \text{ 满足： } \begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(x, 0) = 0, v_t(x, t) = 0 \\ v(0, t) = g(t), \end{cases} \quad \text{其中 } g(t) = f(t)H(t) \text{ 定义于 } -\infty < t < \infty$$

这样， $v(x, t)$  在  $t \geq 0$  时满足的条件与  $u(x, t)$  相同。

故可以求  $v(x, t)$ ，在  $t \geq 0$  时的  $v$  即为  $u$ ，而  $v$  定义于  $-\infty < t < \infty$ ，可对  $t$  变量作傅氏变换

$$v \text{ 的微分方程对 } t \text{ 变量做 Fourier 变换： } \tilde{v}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) e^{-i\omega t} dt$$

$$(i\omega)^2 \tilde{v}(x, \omega) - a^2 \tilde{v}_{xx}(x, \omega) = 0 \implies \tilde{v}(x, \omega) = \tilde{A}(\omega) e^{i\omega x/a} + \tilde{B}(\omega) e^{-i\omega x/a}$$

做反 Fourier 变换时，第一项出现  $A(t + x/a)$ ，为左行波。

但  $v(x, 0) = 0$ ,  $v_t(x, t) = 0$ ，并且扰动来自  $x = 0$ ,  $x > 0$  区域不可能出现左行波。

故第一项不合题意，舍去（这里还是得用点物理分析）。

因而:  $\tilde{v}(x, \omega) = B(\omega) e^{-i\omega x/a}$

由边条:  $v(0, t) = g(t) \xrightarrow{\text{Fourier变换}} \tilde{v}(0, \omega) = \tilde{g}(\omega)$

$\rightarrow B(\omega) = \tilde{g}(\omega) \rightarrow \tilde{v}(x, \omega) = \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega x/a}$

反Fourier变换:  $v(x, t) = g(t - x/a) = f(t - x/a)H(t - x/a)$

对  $t > 0$ ,  $u(x, t) = v(x, t) = f(t - x/a)H(t - x/a)$ 。与行波法的结果相同。

例 6. 半无限长的匀质细杆侧面绝热,  $x = 0$  端有热流强度  $q_0 \sin \omega_0 t$  的热流流入, 求长时间后的温度分布。

解: 注意长时间后的分布不等于稳定分布 (因为边条与时间有关, 不可能达到稳定),

长时间后的只表明解与初始条件无关, 故无需初条。

对应于振动问题, 相当于求长时间后的受迫振动问题,

这时只剩下策动频率的振动 (参见第十章 强迫振动例题)

对于传热问题, 要求解定解问题

$$\text{定解条件: } \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & 0 \leq x < \infty, \\ u_x(0, t) = -\frac{q_0}{k} \sin \omega_0 t, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) \neq \infty \end{cases}$$

在定解条件中, 所有物理量, 即:  $u(x, t)$ ,  $a$ ,  $q_0$ ,  $k$ , 均为实数。

$$\text{令: } u(x, t) = \text{Im}[U(x, t)], \quad U(x, t) \text{ 满足: } \begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0 \\ U_x(0, t) = -\frac{q_0}{k} e^{i\omega_0 t} \end{cases}$$

显然, 将  $U$  的定解条件取虚部即可证明:  $U(x, t)$  的虚部满足  $u(x, t)$  的定解条件

因此, 只需从  $U$  的定解条件, 解出  $U(x, t)$ , 再求其虚部即得  $u(x, t)$ 。

对时间变量  $t$  做 Fourier 变换:  $\mathcal{F}[U(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) e^{-i\omega t} dt = \tilde{U}(x, \omega)$  得

$$\begin{cases} (i\omega) \tilde{U}(x, \omega) - a^2 \tilde{U}_{xx}(x, \omega) = 0 \\ \tilde{U}_x(0, \omega) = -\frac{q_0}{k} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \end{cases} \Rightarrow \tilde{U}(x, \omega) = A(\omega) e^{\frac{(1+i)\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}} x} + B(\omega) e^{-\frac{(1+i)\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}} x}$$

$$\text{其中利用了: } \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$x \rightarrow \infty$  时,  $U(x, t)$  应有限, 故  $\tilde{U}(x, \omega)$  的第一项的系数  $A(\omega) = 0$

$$\Rightarrow \tilde{U}(x, \omega) = B(\omega) e^{-\frac{(1+i)\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}} x}$$

$$\text{由边条: } \tilde{U}_x(0, \omega) = -\frac{q_0}{k} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \rightarrow B(\omega) = \frac{q_0}{k} \frac{2a\pi}{(1+i)} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\rightarrow \tilde{U}(x, \omega) = \frac{q_0}{k} \frac{2a\pi}{(1+i)} \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} e^{-\frac{(1+i)\sqrt{\omega_0}}{\sqrt{2}} x} \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} \text{反Fourier变换: } U(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{q_0}{k} \frac{a}{(1+i)} \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} e^{-\frac{(1+i)\sqrt{\omega_0}}{\sqrt{2}} x} e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$= \frac{q_0 a}{k \sqrt{\omega_0}} e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \frac{x}{a}} e^{i \omega_0 t - i \frac{\pi}{4} - i \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \frac{x}{a}}$$

记得真正的物理解是  $U(x, t)$  取虚部

$$u(x, t) = \text{Im}[U(x, t)] = \frac{q_0 a}{k \sqrt{\omega_0}} e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \frac{x}{a}} \sin\left(\omega_0 t - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

验证满足定解条件。

$$u = \frac{q_0 a}{k \sqrt{\omega_0}} e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \frac{x}{a}} \text{Sin}\left[\omega_0 t - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} - \frac{\pi}{4}\right];$$

$D[u, t] - a^2 D[u, \{x, 2\}]$  (\* 方程 \*)

$D[u, x] /. x \rightarrow 0;$  (\* 边条 \*)

`Simplify[%]`

0

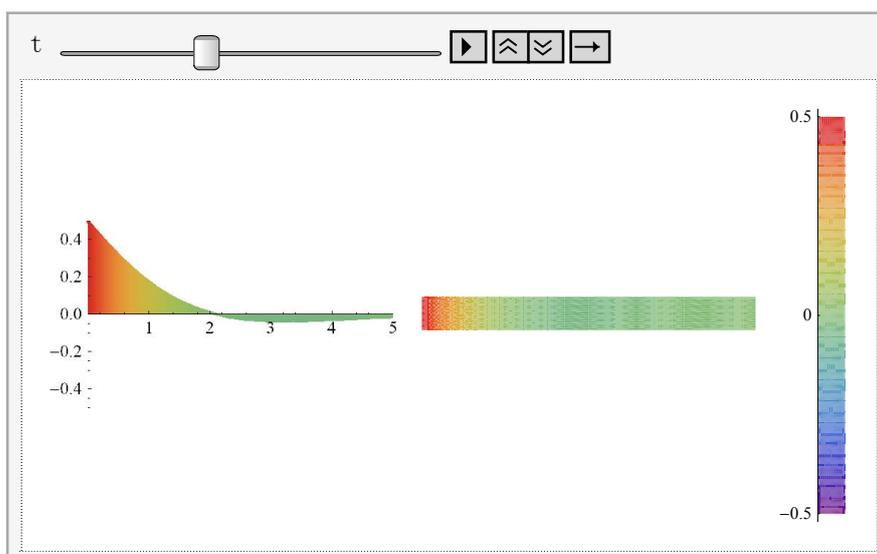
$$\frac{\text{Sin}[t \omega_0] q_0}{k}$$

利用  $\text{Mathematica}$  画出温度分布动态图。

```

xm = 7;
ym = 0.7;
Animate [
  g1 = Plot [  $\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \left[ t - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \right]$ , {x, 0, xm},
    PlotRange -> {{0, 5}, {-0.5, 0.5}},
    ColorFunction -> Function[{x, y}, ColorData["Rainbow"] [y +  $\frac{1}{2}$ ]],
    ColorFunctionScaling -> False, Filling -> Axis];
  g2 = ContourPlot [  $\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \left[ t - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \right]$ ,
    {x, 0, xm}, {y, 0, ym}, Axes -> False, Frame -> False, AspectRatio -> ym / xm,
    Contours -> 35, ContourStyle -> None, PlotRange -> Full,
    ColorFunction -> (ColorData["Rainbow"] [# + 1 / 2] &),
    ColorFunctionScaling -> False];
  g3 = ContourPlot[y,
    {x, -0.2, 0.2}, {y, -0.5, 0.5}, Axes -> False, AspectRatio -> 15,
    Contours -> 35, ContourStyle -> None, PlotRange -> All,
    ColorFunction -> (ColorData["Rainbow"] [# + 1 / 2] &),
    ColorFunctionScaling -> False,
    Frame -> {{True, False}, {False, False}},
    FrameTicks -> {{{-0.50, 0, 0.5}, None}, {None, None}}];
  Grid[{{g1, g2, g3}}, {t, 0, 2  $\pi$ , 0.02}, AnimationRunning -> False]

```



例 7. 求解一维 Schrödinger 方程:  $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - V_0\delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$ , 常数:  $V_0 > 0, m > 0, \hbar > 0, E < 0$ .

解: 这实际上是要求: 粒子的能量值  $E = ?$  粒子的波函数:  $\psi(x) = ?$  (其中  $V_0$  为已知量)

对方程进行 Fourier 变换, 并利用  $\int_{-\infty}^{\infty} V_0\delta(x)\psi(x)e^{-ikx}dx = V_0\psi(0)$ , 有

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2\tilde{\psi}(k) - V_0\psi(0) = E\tilde{\psi}(k) \rightarrow \tilde{\psi}(k) = -\frac{V_0c}{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}, \quad \text{其中: } c = \psi(0)$$

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0)}{k^2 + \frac{2m(-E)}{\hbar^2}} = \beta(k, E)\psi(0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\psi}(k) = \beta(k, E)\psi(0) \text{ 决定 } E \text{ 的取值} \\ \text{(注意 } \psi \text{ 与 } \tilde{\psi} \text{ 的区别)} \end{array} \right.$$

反 Fourier 变换:  $\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k)e^{ikx}dk$ , 两边取  $x=0$ , 有

$$\psi(0) = \frac{\psi(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(k, E)dk \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \beta(k, E)dk = 2\pi$$

$$\text{即: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}{k^2 + \frac{2m(-E)}{\hbar^2}} dk = 2\pi, \quad \text{因为 } E < 0, \text{ 令 } \alpha = \sqrt{\frac{2m(-E)}{\hbar^2}}$$

$$\text{从而: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k^2 + \alpha^2} = \frac{\pi\hbar^2}{mV_0}$$

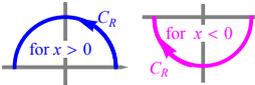
利用留数定理, 也可以通过原函数  $\text{arctg}\left(\frac{k}{\alpha}\right)$  再代入上下限

$$\text{上式左边} = 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{k^2 + \alpha^2}\right]_{k=i\alpha} = \frac{\pi}{\alpha} = \text{右边} = \frac{\pi\hbar^2}{mV_0}$$

$$\text{可解得: } E = -\frac{\alpha^2\hbar^2}{2m} = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \rightarrow \tilde{\psi}(k) = -\frac{V_0c}{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{V_0c}{k^2 + \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^4}}$$

$$\text{令: } k_0 = \frac{mV_0}{\hbar^2}, \quad \psi(x) = \frac{2m}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0c e^{ikx}}{k^2 + k_0^2} dk = c e^{-k_0|x|} = \psi(0) e^{-k_0|x|}$$

其中利用了 Jordan 引理:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{ikx}}{k^2 + k_0^2} dk = 0, \quad \text{对 } x > 0 \text{ 与 } x < 0, C_R \text{ 为}$$


**物理意义:** 这里的  $k_0$  对应于波矢,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ .

$k_0$  越大, 波长越短, 波函数  $\psi(x) \sim e^{-k_0|x|}$  衰减越快。

对应于动量越大的态的波函数越是局域在  $x \sim 0$  附近。

与经典物理中动量越大的态越是弥散在空间相反。

实际上, 尽管势阱无限深, 但宽度却无限窄, 有限大小的经典粒子是“陷不进去”的,

只有量子粒子才受势阱作用“陷”在  $x \sim 0$  附近, 并且动量越大, 波长越短, “陷得越深”, 局域性越强。

例 8. 三维空间的自由振动, Poisson 公式

定解问题：三维：  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0 \\ u(\vec{r}, 0) = \varphi(\vec{r}), \quad u_t(\vec{r}, 0) = \psi(\vec{r}) \end{cases}$  三维情况对应于 Poisson公式

一维：  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$  一维情况有 D'Alembert 公式

解：对  $\vec{r}$  做三维Fourier变换，在Fourier空间，定解问题化为

$$\begin{cases} \ddot{u}(\vec{k}, t) + a^2 k^2 \tilde{u}(\vec{k}, t) = 0 \\ \tilde{u}(\vec{k}, 0) = \tilde{\varphi}(\vec{k}), \quad \dot{\tilde{u}}(\vec{k}, 0) = \tilde{\psi}(\vec{k}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}(\vec{k}, t) = A(\vec{k}) \cos a k t + B(\vec{k}) \sin a k t \\ \tilde{u}(\vec{k}, 0) = \tilde{\varphi}(\vec{k}), \quad \dot{\tilde{u}}(\vec{k}, 0) = \tilde{\psi}(\vec{k}) \end{cases}, \quad \text{其中 } k = |\vec{k}|.$$

由初条定出  $A(\vec{k}), B(\vec{k})$ :  $\tilde{u}(\vec{k}, t) = \frac{\tilde{\varphi}(\vec{k}) \cos a k t}{I_1} + \frac{\tilde{\psi}(\vec{k}) \sin a k t}{k a I_2}$

做反Fourier变换，因为  $I_1$  与  $I_2$  均为两个  $\vec{k}$  的函数的乘积，反变换必然是一些卷积。下逐项计算。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin \alpha k}{k}\right] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \frac{e^{i\alpha k} - e^{-i\alpha k}}{2ik} e^{i k r \cos \theta} k^2 dk d\cos \theta d\phi \quad (\text{其中: } \alpha = a t) \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha k} - e^{-i\alpha k}}{2ik} \frac{(e^{i k r} - e^{-i k r})}{i k r} k^2 dk \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \int_0^\infty (e^{i\alpha k} - e^{-i\alpha k})(e^{i k r} - e^{-i k r}) dk \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \left[ \int_0^\infty (e^{i(\alpha+r)k} + e^{-i(\alpha+r)k} - e^{i k(\alpha-r)} - e^{-i(\alpha-r)k}) dk \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi r} [\delta(r+\alpha) - \delta(r-\alpha)] = \frac{1}{4\pi r} \delta(r-\alpha) \\ \Rightarrow \quad &\boxed{\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin \alpha k}{k}\right] = \frac{1}{4\pi r} \delta(r-\alpha) = f(\vec{r})} \end{aligned}$$

其中利用了：  $\int_{-\infty}^\infty e^{i k(r \pm \alpha)} dk = 2\pi \delta(r \pm \alpha)$  及：  $r = |\vec{r}| \geq 0, \alpha = a t \geq 0$  故：  $\delta(r+\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[I_2] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\tilde{\psi}(\vec{k}) \sin a k t}{a k}\right] = \frac{1}{a} \int \int \int \psi(\vec{r}') f(\vec{r} - \vec{r}') d^3 \vec{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi a} \int \int \int \frac{\psi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - a t) d^3 \vec{r}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\cos \alpha k] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \frac{e^{i\alpha k} + e^{-i\alpha k}}{2} e^{i k r \cos \theta} k^2 dk d\cos \theta d\phi \quad (\text{其中: } \alpha = a t) \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha k} + e^{-i\alpha k}}{2} \frac{(e^{i k r} - e^{-i k r})}{i k r} k^2 dk \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \int_0^\infty (e^{i\alpha k} + e^{-i\alpha k})(e^{i k r} - e^{-i k r}) i k dk \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty (e^{i(\alpha+r)k} + e^{-i(\alpha+r)k} - e^{i k(\alpha-r)} - e^{-i(\alpha-r)k}) \frac{i k}{r} dk \right] \\ &= ? \quad (\text{思考: 如何Fourier变换的利用微分定理}) \end{aligned}$$

另辟捷径：  $\cos a k t = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\sin k a t}{k a} \right] \leftrightarrow \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\delta(r - a t)}{r} \right] = g(\vec{r})$ ，这里偏导是指求导时  $a, k$  视为常量

傅氏变换是对  $\vec{r}$  进行的。注意因为有  $\delta(r - a t)$  因子， $r$  不再独立于  $t$ ，不能移到求导算符  $\frac{\partial}{\partial t}$  之外。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[I_1] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{\varphi}(\vec{k}) \cos a k t\right] = \frac{1}{4\pi a} \int \int \int \varphi(\vec{r}') g(\vec{r} - \vec{r}') d^3 \vec{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi a} \int \int \int \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - at)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^3 \vec{r}' \quad \text{注意这里 } \vec{r}' \text{ 是积分变量, 与 } t \text{ 无关} \\ &= \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \frac{\varphi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - at) d^3 \vec{r}' \end{aligned}$$

$u(\vec{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}[I_1] + \mathcal{F}^{-1}[I_2]$  以  $\int_{V_\infty} d^3 \vec{r}'$  表示对整个空间的积分

$$= \frac{1}{4\pi a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\infty} \frac{\varphi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - at) d^3 \vec{r}' + \int_{V_\infty} \frac{\psi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - at) d^3 \vec{r}' \right]$$

物理意义：看  $\vec{r} = 0$  处的振动，假设初始扰动仅局限于空间某一区域  $V_0$  之内，如图所示

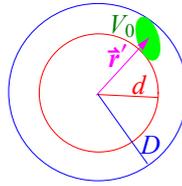
$V_0$  区距原点  $\vec{r} = 0$  最近的距离为  $d$ ，

最远的距离为  $D$ 。以原点为球心，

$d$  和  $D$  为半径作两球面  $S_d$  和  $S_D$ 。

初始扰动  $\varphi(\vec{r}')$  和  $\psi(\vec{r}')$  局限于  $V_0$  之内，

$\varphi(\vec{r}')$  和  $\psi(\vec{r}')$  仅在  $d \leq r' \leq D$  才不为 0。



由  $u(\vec{r}, t)$  的表达式：

$$u(0, t) = \frac{1}{4\pi a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\infty} \frac{\varphi(\vec{r}')}{r'} \delta(r' - at) d^3 \vec{r}' + \int_{V_\infty} \frac{\psi(\vec{r}')}{r'} \delta(r' - at) d^3 \vec{r}' \right] \quad \text{—— 积分对整个空间进行。}$$

现观察某一时刻  $t$  在  $\vec{r} = 0$  处的振动：

$t < d/a$  时，被积函数中的  $\delta$  函数要求仅在  $r' = at$  积分才不为 0，

但  $r' = at$  时，有  $r' = at < d$ ，而  $r' < d$  时  $\varphi(\vec{r}')$  和  $\psi(\vec{r}')$  均为 0。

故在  $t < d/a$  时， $u(0, t)$  为 0。

$t > D/a$  时，一方面，被积函数中的  $\delta$  函数要求仅在  $r' = at$  积分才不为 0，

另一方面， $r' = at$  时， $r' = at > D$ ， $r' < D$  时  $\varphi(\vec{r}')$  和  $\psi(\vec{r}')$  均为 0。

故在  $t > D/a$  时， $u(0, t)$  为 0。

仅在  $d/a < t < D/a$  时， $u(0, t)$  才不为 0。也就是说，位于  $V_0$  区域的扰动，

以速度  $a$  传播，太早了，扰动尚未传到达  $\vec{r} = 0$  处，太迟了，扰动“已乘黄鹤去”。

令： $d^3 \vec{r}' = dS' dr'$ ， $u(\vec{r}, t)$  可改写为

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}} \frac{\varphi(\vec{r}')}{at} dS' + \int_{S_{at}} \frac{\psi(\vec{r}')}{at} dS' \right] \quad \text{—— Poisson 公式}$$

$S_{at}$  表明积分仅在以  $\vec{r}$  为球心， $at$  为半径的球面上进行。这就是三维空间的自由振动问题的解。

换言之，要看  $\vec{r}$  处在  $t$  时刻是否有振动，仅需以  $\vec{r}$  为球心， $at$  为半径做球面，

若球面经过  $\varphi(\vec{r}')$  或  $\psi(\vec{r}')$  不为 0 的区域，则  $u(\vec{r}, t) \neq 0$ ，否则  $u(\vec{r}, t) = 0$ 。

物理意义：

1.  $t$  时刻  $\vec{r}$  处的振动是由以  $\vec{r}$  为球心， $at$  为半径的球面上在  $t = 0$  时刻的扰动传来的 —— 波以速度  $a$  传播。

2. 假设初始时刻： $\psi(\vec{r}') = 0$ ，

$\varphi(\vec{r}')$  仅在以  $R$  为半径厚度为  $2d$  的薄球壳上的某一立体角  $\delta\Omega$  上为常数  $u_0$ ，其余为 0

则：仅在  $R - d \leq at \leq R + d$  时，在  $\vec{r} = 0$  处的振动才不为 0，这时

$$u(\vec{r}, t)|_{\vec{r}=0} = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}} \frac{\varphi(\vec{r}')}{at} dS' = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}} \frac{\varphi(at, \Omega)}{at} (at)^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} (at u_0 \delta\Omega) = \frac{\delta\Omega}{4\pi} u_0$$

$r=0$  处感受到的位移仅为原来的  $\frac{\delta\Omega}{4\pi}$ , 一维情况为  $\frac{1}{2}$ ,

因为位移 (扰动) 均匀分配于整个空间的  $4\pi$  立体角中, 对二维情况, 则均匀分配于  $2\pi$  平面角中。

思考:

## 正弦、余弦变换

从以上例题可知:

- 应用Fourier变换求解微分方程, 主要是利用微分定理将微分方程变为代数方程

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \tilde{f}(k), \quad \text{条件: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{(m)}(x) = 0, \quad \text{for } m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- 自变量的变化范围应在  $-\infty$  到  $+\infty$ 。对半无界情况, 应对时间或空间变量进行延拓。

能否对半无界情况直接处理? —— 正弦、余弦变换

$$\begin{cases} \mathcal{F}_S[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \sin kx \, dx = \tilde{f}_S(k) \\ \mathcal{F}_S^{-1}[\tilde{f}_S(k)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}_S(k) \sin kx \, dk = f(x) \end{cases} \quad \text{正弦变换}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_C[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx = \tilde{f}_C(k) \\ \mathcal{F}_C^{-1}[\tilde{f}_C(k)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}_C(k) \cos kx \, dk = f(x) \end{cases} \quad \text{余弦变换}$$

利用正弦、余弦变换, 就不必延拓到  $x < 0$  区间。

实际上, 正弦、余弦变换已经分别隐含了奇延拓与偶延拓。

现在的问题是, 是否有类似于Fourier变换的微分定理的性质,

以便把微分变为乘积。为此, 需要观察微商的正弦或余弦变换。

$$\mathcal{F}_S[f'(x)] = \int_0^{\infty} f'(x) \sin kx \, dx = f(x) \sin kx \Big|_0^{\infty} - k \int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx = -k \tilde{f}_C(k)$$

其中利用了分部积分, 以及  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 。类似可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S[f''(x)] &= \int_0^{\infty} f''(x) \sin kx \, dx = f'(x) \sin kx \Big|_0^{\infty} - k \int_0^{\infty} f'(x) \cos kx \, dx \\ &= -k f(x) \cos kx \Big|_0^{\infty} - k^2 \int_0^{\infty} f(x) \sin kx \, dx, \quad \text{利用了 } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0 \\ &= k f(0) - k^2 \tilde{f}_S(k) \end{aligned}$$

因此, 若要利用正弦变换求解微分方程, 除  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(m)}(x) = 0$  外, 还需要:

- 微分方程中应包含:  $f(x)$  和  $f''(x)$ , 不可含有  $f'(x)$ , 否则正余弦变换互换, 不能求解
- $f(0)$  已知 (最好是 0), 即对应于 Dirichlet 条件 —— I 类边条作正弦变换

类似可得,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_C[f'(x)] &= \int_0^{\infty} f'(x) \cos kx \, dx = f(x) \cos kx \Big|_0^{\infty} + k \int_0^{\infty} f(x) \sin kx \, dx = -f(0) + k \tilde{f}_S(k) \\ \mathcal{F}_C[f''(x)] &= \int_0^{\infty} f''(x) \cos kx \, dx = f'(x) \cos kx \Big|_0^{\infty} + k \int_0^{\infty} f'(x) \sin kx \, dx \\ &= -f'(0) + k f(x) \sin kx \Big|_0^{\infty} - k^2 \int_0^{\infty} f(x) \cos kx \, dx \\ &= -f'(0) - k^2 \tilde{f}_C(k) \end{aligned}$$

因此, 若要利用余弦变换求解微分方程, 除  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(m)}(x) = 0$  外, 还需要:

- 微分方程中应包含:  $f(x)$  和  $f''(x)$ , 不可含有  $f'(x)$

- $f'(0)$  已知, 即对应于 Neumann 条件 —— II 边条作正弦变换

正弦、余弦变换虽然可应用于半无界情况, 但是

- 应做何种变换, 取决于边条类型:  $f(0)$  或  $f'(0)$
- 微分方程中应包含:  $f(x)$  和  $f''(x)$ , 不可含有  $f'(x)$

有无变换可摆脱这两个限制? —— Laplace 变换:  $\mathcal{L}[f(x)]$ , 可惜没有时间探讨。

⑩ 例 9. 半无限长细杆初温为 0,  $x=0$  端点有热流强度  $q(t)$  流入, 求温度分布  $u(x, t)$ 。

$$\text{解: 定解问题: } \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & \text{泛定方程} \\ u_x(0, t) = -h(t), \quad u_x(\infty, 0) = 0 & \text{边条, } h(t) = q(t)/\kappa \\ u(x, 0) = 0 & \text{初条} \end{cases}$$

$x$  变量是半无界, 方程不含对  $x$  的一阶导数项, 给定 II 类边条  $\Rightarrow$  余弦变换

对方程做余弦变换, 注意到:  $\mathcal{F}_C[f''(x)] = -f'(0) - k^2 \tilde{f}_C(k)$ , 有

$$\tilde{u}_t(k, t) - a^2 [-u_x(0, t) - k^2 \tilde{u}(k, t)] = 0 \Rightarrow \tilde{u}_t(k, t) + k^2 a^2 \tilde{u}(k, t) = a^2 h(t)$$

此乃一阶线性常系数非齐次微分方程, 令:  $\tilde{u}(k, t) = A(t) e^{-k^2 a^2 t}$  (常数变易法思想)

$$\text{代入得: } A'(t) e^{-k^2 a^2 t} = a^2 h(t) \Rightarrow A(t) = \int_0^t a^2 h(\tau) e^{k^2 a^2 \tau} d\tau - A(0)$$

$$\text{而: } u(x, 0) = 0 \Rightarrow \tilde{u}(k, 0) = 0 = A(0)$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(k, t) = \int_0^t a^2 h(\tau) e^{-k^2 a^2 (t-\tau)} d\tau$$

做反余弦变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{u}(k, t) \cos kx dk = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^t a^2 h(\tau) e^{-k^2 a^2 (t-\tau)} \cos kx d\tau dk \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \int_0^t d\tau h(\tau) \int_0^\infty e^{-k^2 a^2 (t-\tau)} \cos kx dk \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^t \frac{h(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau \end{aligned}$$

其中利用了: (注意以下“推导”仅用于帮助理解, 数学上是不严格的)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2 + i\beta x} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(x+i\beta/2\alpha)^2 - \beta^2/4\alpha} dx = e^{-\beta^2/4\alpha} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(x+i\beta/2\alpha)^2} dx \\ &= \frac{e^{-\beta^2/4\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \frac{e^{-\beta^2/4\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

⑩ 例 10. 求解上半平面的 Laplace 边值问题。

$$\text{定解问题: } \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x, 0) = g(x), \quad u(x, \infty) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0, \end{cases}$$

解: 此定解问题对应于给定  $x$  轴上的电势, 求上半平面的电势。

$x$  无界, 可做 Fourier 变换,  $y$  半无界 I 类边条, 做正弦变换 (因为是 Dirichlet 边条)。

$$(ik_1)^2 \tilde{u}(k_1, k_2) + [k_2 \tilde{u}(k_1, 0) - k_2^2 \tilde{u}(k_1, k_2)] = 0, \text{ 纯代数方程}$$

$$u(x, 0) = g(x) \rightarrow \tilde{u}(k_1, 0) = \tilde{g}(k_1) \rightarrow \tilde{u}(k_1, k_2) = \frac{k_2 \tilde{u}(k_1, 0)}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{k_2 \tilde{g}(k_1)}{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{k_2 e^{ik_1 x}}{k_1^2 + k_2^2} dk_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{e^{ik_1 x}}{k_1 - ik_2} - \frac{e^{ik_1 x}}{k_1 + ik_2} \right] dk_1$$

$$= \frac{1}{2} e^{-k_2 |x|} \quad \text{其中利用了 Jordan引理 以及 } k_2 > 0$$

利用卷积定理： $\tilde{u}(x, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{1}{2} e^{-k_2 |x-\xi|} d\xi$

做反正弦变换：

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{1}{2} e^{-k_2 |x-\xi|} \sin k_2 y d\xi dk_2, \quad \text{蓝色部分为 } \tilde{u}(x, k_2) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi g(\xi) \int_0^{\infty} \frac{1}{2i} [e^{-k_2(|x-\xi|-iy)} - e^{-k_2(|x-\xi|+iy)}] dk_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi g(\xi) \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{|x-\xi|-iy} - \frac{1}{|x-\xi|+iy} \right] \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \end{aligned}$$

```
Clear[g, x, y];
g[x_] := Exp[-x^2];
u[x_, y_] :=  $\frac{y}{\pi}$  Integrate  $\left[ \frac{g[\xi]}{(\xi - x)^2 + y^2}, \{\xi, -\infty, \infty\} \right];
D[u[x, y], {x, 2}] + D[u[x, y], {y, 2}];
FullSimplify[%, {y > 0, x ∈ Reals}]$ 
```

0