Chapter 4 解析延拓 Γ 函数和 B 函数

一、 解析函数的零点孤立性和解析函数的唯一性

1. 零点的定义：

设 $f(z)$ 在 a 点及其邻域内解析，如果 $f(a)=0$，则称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的零点。

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^n$, $(|z-a|<r)$, 若 $f(a)=0$，则必有，

$c_0=c_1=\cdots=c_{m-1}=0$，$c_m\neq 0.$ 此时，称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

相应地， $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$， $f^{(m)}(a)\neq 0.$

零点的阶数都是确定的正整数——在函数的解析区域内，不可能有分数次的零点。

2. 零点的孤立性：

解析函数的零点孤立性定理：设 $z=a$ 为 $f(z)$ 的零点，若 $f(z)$ 不恒等于 0，且在包含 $z=a$ 在内的区域内解析，则必能找到圆 $|z-a|=\rho\left(\rho>0\right)$，使在圆内除 $z=a$ 外，$f(z)$ 无其它零点 [在多值非解析函数 $f(z)=\left(z-a\right)^{1/m}\phi(z)$ 中，$z=a$ 虽然为零点，但是又是枝点]。

证明：设 $z=a$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 $f(z)=\left(z-a\right)^m\phi(z)$，其中 $\phi(z)$ 解析，且 $\phi(a)\neq 0.$ 由 $\phi(z)$ 在 $z=a$ 连续，即，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\rho>0$，使得当 $|z-a|<\rho$ 时，$|\phi(z)-\phi(a)|<\varepsilon.$ 不妨取 $\varepsilon=|\phi(a)|/2$，由于

$$|\phi(a)|-|\phi(z)|\le|\phi(z)-\phi(a)|，则得，|\phi(z)|>|\phi(a)|-\varepsilon=\frac{1}{2}|\phi(a)|>0.$$

由此即证得 $f(z)$ 在 $|z-a|<\rho$ 内除 $z=a$ 外无其它零点。

推论 1：设 $f(z)$ 在 D：$|z-a|<R$ 内解析，若在 D 内存在 $f(z)$ 的无穷多个零点 $\{z_n\}$，且 $\lim_{n\to\infty}z_n=a$，但 $z_n\neq a$，则 $f(z)$ 在 D 内恒为0.

证明： $f(z)$ 在 D 内连续， $\lim_{z\to a}f(z)=f(a).$ 若取 $z\to a$ 的一个特殊序列，即 $\{z_n\}$，当然仍有，$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=f(a).$ 而 $f(z_n)=0$，故 $f(a)=0$，即 $z=a$ 为 $f(z)$

的零点，并且是 $f(z)$ 的非孤立零点（即 $f(z)$ 零点的极限点）。在 $f(a)$ 的邻域中总存在无穷多个 $f(z)$ 的零点，根据零点的孤立性原理，必有 $f(z)\equiv 0$.

推论 2： 设 $f(z)$ 在 D：$|z-a|<R$ 内解析，若在 D 内存在过 a 点的一段弧 l 或含 a 点的子区域 g，在 l 上或 g 内 $f(z)\equiv 0$，则在整个区域 D 内 $f(z)\equiv 0$.

这个推论是显然的，因为在 l 上或 g 内总能找到一个以 $z=a$ 为极限点的序列 $\{z_n\}$，且 $z_n\neq a$.

推论 3： 设 $f(z)$ 在 D 内解析，若在 D 内存在过 a 点的一段弧 l 或含 a 点的子区域 g，在 l 上或 g 内 $f(z)\equiv 0$，则在整个区域 D 内 $f(z)\equiv 0$.

（做一些相互交叠的圆，即得）。

3. 解析函数的唯一性：

解析函数的唯一性定理： 设在区域 D 内有两个解析函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$，且在 D 内存在一个序列 $\{z_n\}$，$f_1(z_n)=f_2(z_n)$. 若 $\{z_n\}$ 的一个极限点 $z=a(\neq z_n)$ 也落在 D 内，则在 D 内 $f_1(z)=f_2(z)$.

证明：只需考虑 $g(z)=f_1(z)-f_2(z)$，由上面的推论一，即可得 $g(z)\equiv 0$，即 $f_1(z)=f_2(z)$.

推论 1： 设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都在区域 D 内解析，且在 D 内的一段弧或一个子区域内相等，则在 D 内 $f_1(z)=f_2(z)$.

例如，$\sin 2z$，$2\sin z\cos z$ 在全平面是解析的，又因为 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，所以 $\sin 2z=2\sin z\cos z$.

推论 2： 设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都在区域 D 内解析，且在 D 内某一点 a 满足

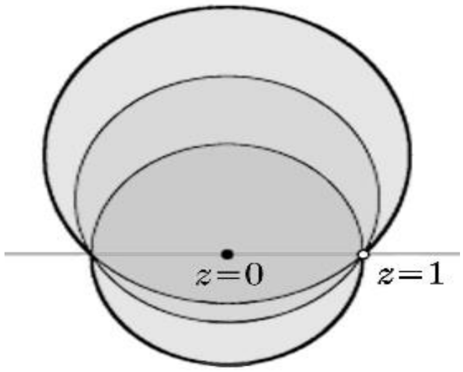
$$f_1(a)=f_2(a)，\quad f_1^{(n)}(a)=f_2^{(n)}(a)\ (n=1,2,\cdots)，则在 D 内 f_1(z)=f_2(z).$$

由上面的条件可知，至少在 a 的一个邻域内，$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 有相同的 Taylor 级数表示式，因此在 a 的这个邻域内，$f_1(z)=f_2(z)$. 由推论 1，在区域 D 内，$f_1(z)=f_2(z)$.

二、解析延拓

1．定义：设函数 $f_1(z)$ 在区域 D_1 内解析，函数 $f_2(z)$ 在区域 D_2 内解析，而在 D_1 与 D_2 的公共区 $D_1 \cap D_2$ 内，$f_1(z)=f_2(z)$，则称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 D_2 内的解析延拓；反之，$f_1(z)$ 为 $f_2(z)$ 在 D_1 内的解析延拓。

2．用 Taylor 级数进行解析延拓



设 $f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}$. D_1：$|z|<1$;

在 D_1 内一点，如 $z=\frac{i}{2}$，我们有

$$f_1^{(n)}\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{n!}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^{n+1}} \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

再构造 $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}\left(\frac{i}{2}\right)}{n!}\left(z-\frac{i}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^{n+1}}\left(z-\frac{i}{2}\right)^n.$

显然它的解析区域 D_2：$\left|z-\frac{i}{2}\right|<\left|1-\frac{i}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$

在 $D_1 \cap D_2$，由推论 2，有 $f_1(z)=f_2(z)$，因此它们互为解析延拓。

$f(z)=\begin{cases} f_1(z) & z\in D_1 \\ f_2(z) & z\in D_2 \end{cases}$，这样 $f(z)$ 的定义域就扩大为 $D_1 \cup D_2$.

事实上，$\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^{n+1}}\left(z-\frac{i}{2}\right)^n=\frac{1}{1-z}$，

即 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 只不过是同一个函数 $\frac{1}{1-z}$ 在不同区域的表达式。

求出无穷级数的和函数是一种最直截了当的方法。

* 解析延拓并非总能进行。如 $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$，$|z|<1$，

它在 $|z|=1$ 的圆周上处处是奇点。

3．用函数关系式进行解析延拓-- Γ 函数

$\Gamma(x)\equiv\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\quad (x>0)$，　Γ 函数，或称第二类 Euler 积分。

当 $n=0,1,2,\cdots$时，$\Gamma(n+1)=n!$ (分部积分可得，高等数学知识)。

定义复变量 z 的 Γ 函数:

$\Gamma(z)\equiv\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\ (\mathrm{Re}\,z>0)$，因为被积函数可能是多值的，约定正实轴上：$\arg t=0$. 可证，$\Gamma(z)$ 在右半平面是解析的，下面我们进行解析延拓。

因为，$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x}\mathrm{d}t=-e^{-t}t^x\Big|_0^\infty+x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t=x\Gamma(x),\quad (x>0)$

又因为$\Gamma(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 解析，那么 $\Gamma(z+1)$ 和 $z\Gamma(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 也解析。

所以，$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\ (\mathrm{Re}\,z>0)$，或 $\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma(z+1)}{z}\ (\mathrm{Re}\,z>0)$.

注意到 $\dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ 在 $\mathrm{Re}(z+1)>0,(z\neq 0)$ 是解析的，可定义

$$\Gamma(z)\equiv\frac{\Gamma(z+1)}{z}\qquad (-1<\mathrm{Re}\,z\leq 0,z\neq 0).$$

这样，$\Gamma(z)$ 就从 $\mathrm{Re}\,z>0$ 解析延拓到 $\mathrm{Re}\,z>-1(z\neq 0)$. This is also a RR.

类似的，可将其延拓到整个复平面。一般地，定义

$$\Gamma(z)\equiv\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}\quad [-(n+1)<\mathrm{Re}\,z\leq -n,z\neq 0,-1,\cdots,-n].$$

这样定义的$\Gamma(z)$ 在全平面除 $z=0,-1,-2,\cdots$外处处解析，$z=0,-1,-2,\cdots$是它的单极点。在整个复平面满足 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\ (z\neq 0,-1,-2,\cdots)$.

Γ 函数的性质：

1). $\Gamma(1)=1$；　2). $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$；　3). $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}\quad (z\neq$ 整数$)$;

4). $\Gamma(2z)=\dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right)$.　5). $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$.

4．B 函数（第一类 Euler 积分）

由 $\mathrm{B}(x,y)\equiv\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t\quad (x>0,y>0)$ 得

$\mathrm{B}(p,q)\equiv\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t\quad (\mathrm{Re}\,p>0,\mathrm{Re}\,q>0)$且约定正实轴上：$\arg t=0$，

$\arg(1-t)=0.$ 可以证明 B 函数与 Γ 函数的关系[见教材第四章 p.62 式(4.24)的证明]：$\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad(\mathrm{Re}\,p>0,\mathrm{Re}\,q>0).$

根据 Γ 函数的性质，上式在全平面成立（$p\neq 0,-1,-2,\cdots,q\neq 0,-1,-2,\cdots$）.

下面证明 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\ (0<x<1)\ \&\ \Gamma(2z)=\dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right).$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\int_0^\infty e^{-s}s^{-x}\mathrm{d}s=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}(\frac{t}{s})^x\frac{1}{t}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$\text{非线性变换:}\xi=s+t,\eta=\frac{t}{s}(0\le\xi<\infty,0\le\eta<\infty)\Rightarrow s=\frac{\xi}{1+\eta},t=\frac{\xi\eta}{1+\eta},$$

$$\frac{\partial(s,t)}{\partial(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial s}{\partial\xi},\dfrac{\partial s}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial t}{\partial\xi},\dfrac{\partial t}{\partial\eta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+\eta},-\dfrac{\xi}{(1+\eta)^2}\\ \dfrac{\eta}{1+\eta},\dfrac{\xi}{(1+\eta)^2}\end{vmatrix}=\frac{\xi}{(1+\eta)^2},$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}(\frac{t}{s})^x\frac{1}{t}\mathrm{d}s\mathrm{d}t&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\xi}\eta^x\frac{1+\eta}{\eta\xi}\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(\xi,\eta)}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\xi}\eta^x\frac{1+\eta}{\eta\xi}\frac{\xi}{(1+\eta)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\xi}\eta^{x-1}\frac{1}{(1+\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\int_0^\infty e^{-\xi}\mathrm{d}\xi\int_0^\infty\frac{\eta^{x-1}}{1+\eta}\mathrm{d}\eta=\int_0^\infty\frac{\eta^{x-1}}{1+\eta}\mathrm{d}\eta=\frac{\pi}{\sin\pi x}.\end{aligned}$$

这里分离变量了，最后一步用了教案第五章 p.23 的留数定理。 由第二页的推论 1 可知，当 $z\neq$ 整数时 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ 仍然成立。取 $\mathrm{z}=\dfrac{1}{2}$ 得 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

考察 $\dfrac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=\mathrm{B}(z,z)=\displaystyle\int_0^1[t(1-t)]^{z-1}\mathrm{d}t=2\int_0^{1/2}[t(1-t)]^{z-1}\mathrm{d}t.$ 令 $t=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{\xi})$ 得

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=2^{1-2z}\int_0^1(1-\xi)^{z-1}\xi^{-1/2}\mathrm{d}\xi=2^{1-2z}\mathrm{B}(z,\frac{1}{2})=2^{1-2z}\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}.$$

利用 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 即得 $\Gamma(2z)=\dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right).$

Home work: 4.2