§2-6 基尔霍夫定律

一、 基本概念及定律的表述

欧姆定律只能用于解比较简单的电路。复杂的电路，往往有许多条导线交汇于一点，整个电路由若干个闭合回路组成，同一回路的各段电路中的电流并不相同。对于这类复杂电路，欧姆定律无法解决。1847 年基尔霍夫（Kirchhoff）给出了求解一般复杂电路的 Kirchhoff 方程组，它包括节点电流方程和回路电压方程，前者是恒定电流条件下任意闭合曲面内电荷守恒的结果，后者是恒定电场环路积分为零（即静电场环路定理）的结果，两者构成了完备的方程组，原则上可以解决任何直流电路问题。Kirchhoff 方程组不仅在恒定条件下严格成立，而且在似稳条件（即整个电路的尺度远小于电路工作频率下的电磁波的波长）下也符合得相当好。把 Kirchhoff 方程组用于交流电路时，电流、电压、电动势均应取瞬时值，通常采用复电压、复电流的形式表示，并引入复阻抗，这就是交流电路的复数解法。于是，从原则上说，无论直流或交流电路的求解问题，均可由 Kirchhoff 定律解决。

1． 基本概念

（1）节点：在电路中，三条或三条以上导线相交在一起的点。如图 2-50，有 A、B、C 和 D 四个节点。

（2）支路：两个相邻节点间，由电源和电阻串联而成的且不含其他它节点的通路。如图 AB 支路，BC 支路和 BD 支路等，共有 6 个支路。通过支路的电流叫支路电流；支路两端的电压叫支路电压。

（3）回路：起点和终点重合在一个节点的环路。如图 2-50 中 1 回路。

（4）独立回路：各回路不相重合，即每个回路至少有一条其它回路所没有的支路。如图 2-50 中有 1、2 和 3 等三个独立回路。独立回路数目减 1 正好等于支路的数目减去节点的数目。

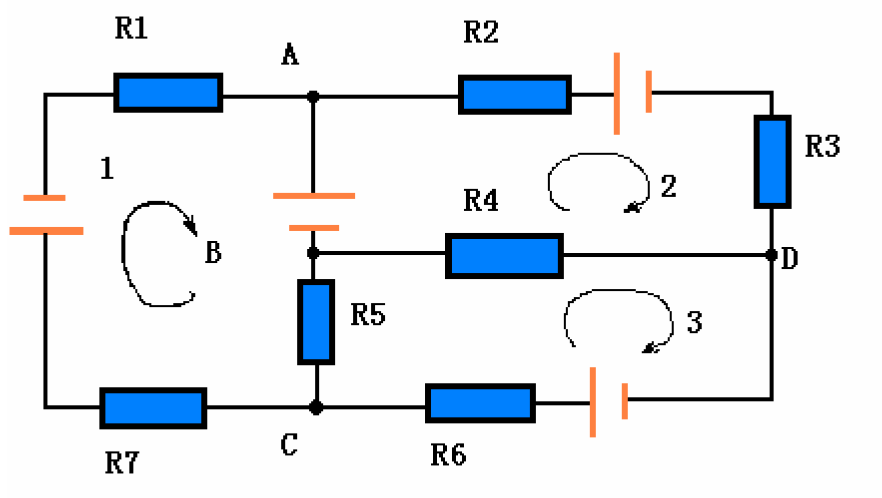

图 2-50　多回路直流电路

2．基尔霍夫方程

（1）　基尔霍夫第一方程

对电路中每一个节点，有的电流流入节点，有的电流自节点流出。根据电荷守恒定律和稳恒电流条件，流入分支点的电流应等于流出分支点的电流，因此，对于每一个分支点，有

$$\sum_k I_k = 0$$

在求和时，流入节点的电流用“+”号，流出节点的电流用“-”号，这就是基尔霍夫第一方程，其实质就是稳恒电流情况下的电荷守恒定律。

(2) 基尔霍夫第二方程

对于复杂电路中任一闭合回路，沿闭合回路绕行一周，回路中各电阻上电势降落的代数和等于各电源的电动势造成的电势升高的代数和，这一结论称为基尔霍夫第二方程。

$$\sum U = \sum (\pm\varepsilon \pm r \pm R) = 0$$

式中ε为回路的总电动势，r 是总内阻，R 是总电阻。正负好取法如下：
先任意假定绕行方向，当绕行方向经电源内部由正极指向负极时，ε取正号，反之取负号。当绕行方向与电流方向一致时，取正号，反之取负号。

(3) 基尔霍夫方程求解电路注意事项

任意复杂的电路，原则上都可以用基尔霍夫方程求解。对于各分支点，可用基尔霍夫第一方程，对于各分回路，可以用基尔霍夫第二方程。在应用基尔霍夫方程解题时，应注意以下几点：

- **电流方向：**在实际问题中，电流方向不一定已知，但我们可以假定一个方向，若最后求得的电流为正，则表示所标的方向与实际方向相同，若求得的电流为负，则表示所标的方向与实际电流的方向相反。
- **独立节点方程数**：根据基尔霍夫第一方程，对每一个分支点，可列出一个方程，但 n 个节点，只有 n-1 个基尔霍夫第一方程是独立的。
- **独立电压方程数：**对每一个闭合回路，可以列一个基尔霍夫第二方程．要注意方程式的独立性。若所列的方程式中，至少有一条支路在已列出的方程式中未用过，则这回路的方程式必定是独立的。但又要注意有足够的方程，以使方程数与未知量的数目相等.

3. 叠加原理

在具有几个电动势的电路中，几个电动势共同在某一支路中引起的电流，等于每个电动势单独存在时在该支路上所产生的电流之和。这个关于各个电动势作用独立性的原理称为叠加原理。

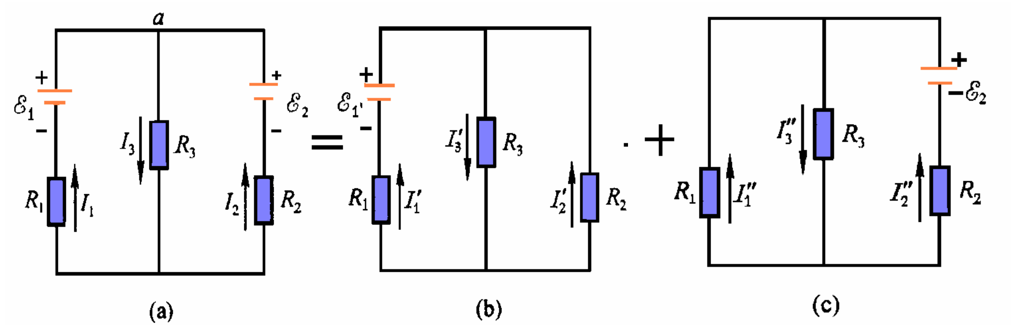

图 2—51 叠加原理的图示

应用叠加原理可以把一个复杂的电路分解成若干比较简单的电路。在每一个比较简单的电路中，仅有一个电动势在所研究的问题中起作用，其他电动势假定被短接了，不过它们的内电阻应包括在相应的各支路的电阻内。

二、基尔霍夫方程及其应用

1. 支路电流法

即对每个支路设定电流的方向和取值（为代数值，由计算决定），对每个独立回路设定绕行方向，然后利用基尔霍夫定律列出方程组。注意独立方程组的数目正好等于待求支路电流的数目，故可解得各支路电流。

[例题] 如图 2-52 所示电路，求各支路中的电流表达式。

[解] 节点数为以 n=2，独立回路数 m＝2，支路数为 l=3，满足关系 m-1=l-n．利用基尔霍夫定律，列出 3 个独立方程：

$$\begin{cases} I_2 + I_3 - I_1 = 0 & \text{节点电流方程1个} \\ -\varepsilon + I_1 R + I_3 R = 0 & \text{回路电压方程2个} \\ 2I_2 R + \varepsilon - I_3 R = 0 & \end{cases}$$

解方程组，得到

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{2\varepsilon}{5R} \\ I_2 = -\dfrac{\varepsilon}{5R} & \text{"–"号表示实际电流与原假定电流方向相反} \\ I_3 = \dfrac{3\varepsilon}{5R} \end{cases}$$

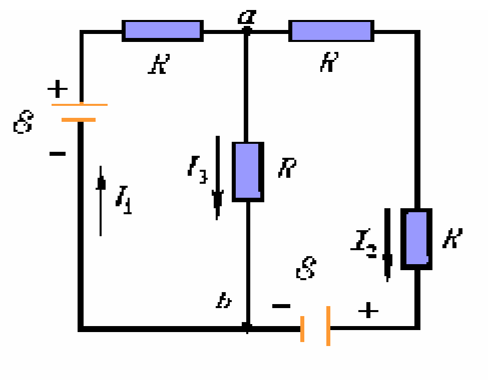

图 2-52　　支路电流法

2.　回路电流法

即设定独立回路的电流的方向（该方向通常取为相应回路的绕行方向）和取值（为代数值，由计算决定），只用基尔霍夫第二定律，便可解出回路的电流。然后再用已得的回路电流求出各支路电流，这样求得的支路电流将自动满足基尔霍夫第一定律。

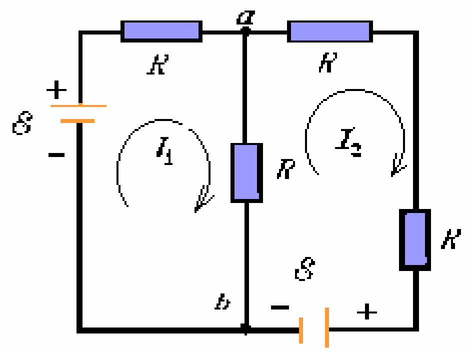

图 2-53 回路电流法

[例题] 对如图 2-53 所示的电路，求各支路电流表达式。

[解]设回路的电流 I_1 和 I_2 的方向如图所示，列出回路电压方程，有

$$\begin{cases}-\varepsilon+I_1R+(I_1-I_2)R=0\\2I_2R+(I_2-I_1)R+\varepsilon=0\end{cases}$$

解之，得到的 I_1 和 I_2 的电流值与上题相同，中间支路 aRb 的电流值为

$$I=I_1-I_2=\frac{3\varepsilon}{5R}$$

两种解法的结果完全相同。

3. 其它典型例题

[例题] 图 2-54 是一电桥电路，R_1、R_2、R_3 和 R_4 的是四臂的电阻，G 是内阻为 R_g 的电流计，电源的电动势为，并忽略其内阻，求通过电流计 G 的电流 I_g 与四臂电阻的关系。

[解] 该桥式电路由 4 个节点和 6 条支路组成，可列出 3 个节点方程和 3 个回路方程，共 6 个独立方程。

$$
\begin{cases}
\text{节点}A，\quad I_1+I_2-I=0 \\
\text{节点}B，\quad I_g+I_3-I_1=0 \\
\text{节点}C，\quad I-I_3-I_4=0 \\
\text{回路}1，\quad I_1R_1+I_gR_g-I_2R_2=0 \\
\text{回路}2，\quad I_3R_3+I_4R_4-I_gR_g=0 \\
\text{回路}3，\quad I_2R_2+I_4R_4-\varepsilon=0
\end{cases}
$$

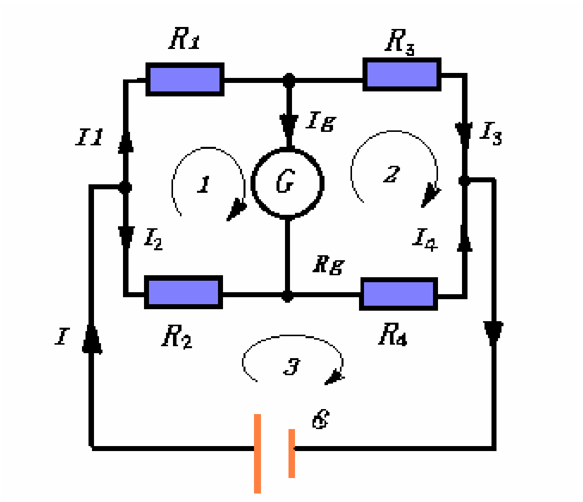

图 2-54　桥式电路

简化后，得到三个方程组：

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_g I_g = 0 \\ R_3 I_1 - R_4 I_2 - (R_3 + R_4 + R_g) I_g = 0 \\ (R_2 + R_4) I_2 + R_4 I_g = \varepsilon \end{cases}$$

采用行列式法解该方程组，则

$$I_g = \frac{\Delta_g}{\Delta}$$

其中Δ_g和Δ分别为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & R_g \\ R_3 & -R_4 & -(R_3 + R_4 + R_g) \\ 0 & R_2 + R_4 & R_4 \end{vmatrix}$$

$$= (R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4) R_g + (R_3 + R_4) R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3 R_4$$

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & 0 \\ R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 + R_4 & \varepsilon \end{vmatrix}$$

$$= (R_2 R_3 - R_1 R_4) \varepsilon$$

若 I_g=0，则 Δ_g 必为零，由此必有

$$\frac{R_1}{R_3}=\frac{R_2}{R_4}$$

桥式电路可以用于测量电阻，若 R_3 为可变电阻，R_2/R_4 的比值一定，则通过调节 R_3，使 I_g=0，由上式就可求得 R_1。

小结二

1．物质按电性质分类可分为导体、绝缘体与半导体。导体的电阻率约在 $10^{-8}\Omega$ m～$10^{-6}\Omega$ m 之间；半导体的电阻率约为 $10^{-6}\Omega$ m～$10^{6}\Omega$ m；绝缘体的电阻率一般为 $10^{6}\Omega$ m～$10^{18}\Omega$ m。在一定的条件下，它们可以互相转化。超导体就是其电阻突然变为零或接近于零的，超导态物体的电阻率必定小于 $10^{-28}\,\Omega$ m。

2．静电场中的导体在静电平衡时具有导体中的自由电荷的分布保持恒定和导体内电场强度处处为零的特性。静电平衡时，电荷只分布在导体的表面，导体内部体电荷密度处处为零；导体表面的电荷分布与导体的几何形状、导体所带的总电量以及周围其它场源和导体有关。导体外靠近其表面的地方的电场与表面垂直，其场强大小为 σ/ε_0。静电屏蔽时，将导体外壳接地时，当腔内无电荷时，腔外电场不能影响腔内，当然腔外电场也不影响腔内。

3．孤立导体的电容由导体的几何形状唯一确定；采用静电屏蔽的方法，可制成不受周围其他带电体或导体的影响的电容器。常用的电容器可分为平行板电容器、球形电容器和圆柱形电容器；电容器可以串联和并联使用。

4．电流就是大量电荷的定向运动；要产生电流必须存在载流子和迫使电荷作定向运动的非静电力。电流强度即单位时间内通过导体任一根截面的电量，电流密度可以更好地描述导体中各点电流的大小和方向。导体中的电流分布，称为电流场，对电流场也可以通过引入“电流线”来进行形象描述。电流连续方程是电荷守恒定律的数学表达式，可以写成积分和微分形式。电流连续方程表明，电流线只能起、止于电荷随时间变化的地方。稳恒电流的电流线只可能是无头无尾的闭合曲线。

5．当金属导体中存在电场时，导体中便出现电流。欧姆定律表明当保持金属的温度恒定时，金属中的电流密度 $\boldsymbol{j}$ 与该处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成正比。欧姆定律对频率不是非常高的非稳恒电流亦适用。材料的电阻率与温度有关，纯金属的电阻率随温度的变化成线性关系。电场对电荷做功将转变成其他形式的能量，电流通过欧姆介质时，电能将以发热的形式释放出来。欧姆定律可用经典电子论对金属的导电性进行定性的解释。定量的解释要用量子理论。欧姆定律在一些特定的条件下将失效，即 $\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 产或者说 I 与 U 的比例关系遭到破坏。

6．电源就是提供非静电力的装置。在电源内部存在非静电力，这时欧姆定律将改写。电源的电动势就是将单位正电荷从负极经电源内部移到正极时非静电力所作的功。常见的电源有化学电源、温差电源等。

7．全电路欧姆定律描述在外电路和电源组成的闭合电路时的电路方程。在稳恒电流情况下，均匀导体内部宏观电荷密度为零，净电荷只分布在导体表面或导体内不均匀的地方，外电路中，电流线和电力线方向一致，且平行于导体表面。稳恒电路中，静电场的作用调节电荷分布和静电场起着能量的中转作用，它把电源内部的非静电能转送到外电路上。

8．对复杂的电路，可以用基尔霍夫的节点电流方程和回路电压方程来求解。两者构成了完备的方程组，原则上可以解决任何直

流电路问题。在应用基尔霍夫方程解题时，应注意电流方向、独立节点方程数和独立电压方程数的数目。在具有几个电动势的电路中，也可采用叠加原理来简化电路计算。