第62卷第2期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.2
2019年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)02-0201-10 **文献标识码: A**

一类次线性弱耦合系统无穷多个周期解的存在性

王 超

盐城师范学院数学与统计学院 盐城 224002
E-mail: wangchaosudamath@163.com

摘 要 本文研究一类弱耦合系统的周期解问题. 在某种关于时间映射的次线性条件下, 通过应用 Poincaré–Bohl 定理和一个高维版的 Poincaré–Birkhoff 扭转不动点定理, 分别证明了系统至少存在一个调和解和无穷多个 $2m\pi$- 周期解 ($m \in \mathbb{Z}$ 且 $m > 1$).

关键词 次线性; 时间映射; 耦合系统; 周期解
MR(2010) 主题分类 34C15, 34C25
中图分类 O175.14

The Existence of Infinite Periodic Solutions of a Class of Sub-linear Systems with Weak Coupling

Chao WANG

School of Mathematics and Statistics, Yancheng Teachers University, Yancheng 224002*, P. R. China*
E-mail: *wangchaosudamath@163.com*

Abstract We are concerned with the existence of the periodic solutions for a class of weakly coupled systems. Under some sub-linear conditions about time-mapping, we prove the existence of at least one harnomic solution by applying the Poincaré–Bohl theorem and infinite periodic solutions with period $2m\pi$ to equations by applying the higher dimensional version of the Poincaré–Birkhoff theorem, where $m \in \mathbb{Z}$ and $m > 1$.

Keywords sub-linear; time-mapping; coupled system; periodic solutions
MR(2010) Subject Classification 34C15, 34C25
Chinese Library Classification O175.14

1 引言

本文考虑一类弱耦合系统

$$u_i'' + q_i(t)g_i(u_i) = p_i(t,u), \quad i = 1,\ldots,d, \tag{1.1}$$

收稿日期: 2017-12-28; 接受日期: 2018-05-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11571249); 江苏省自然科学基金资助项目 (BK20171275)

其中 $u\in\mathbb{R}^d$, $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 当 $|u_i|$ 充分小时, 有

$$\left|\frac{g_i(u_i)-g_i(0)}{u_i}\right|\le l_i,$$

$l_i\in\mathbb{R}^+$, $i=1,\dots,d$, 且满足

(g_0) $\lim_{|u_i|\to+\infty}\operatorname{sgn}(u_i)\cdot g_i(u_i)=+\infty$;

$p_i:[0,2\pi]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 和 $q_i:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^+:=(0,+\infty)$ 都是连续的且关于 t 是 2π 周期的函数, 且对每一个 $i=1,\dots,d$, 有

(p_0) $|p_i(t,u)|\le P_i\in\mathbb{R}^+$.

设函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续且满足

$$\lim_{|x|\to+\infty}\operatorname{sgn}(x)g(x)=+\infty,$$

则对充分大的正实数 M, 令

$$\tau(M)=\tau(h^-,h^+)=\sqrt{2}\left|\int_{h^-}^{h^+}\frac{ds}{\sqrt{G(h^+)-G(s)}}\right|$$

为自治方程 $x''+g(x)=0$ 的周期轨道

$$\frac{1}{2}y^2+G(x)=M$$

的最小正周期, 其中 $y=x'$, $G(h)=\int_0^h g(s)ds$ 且 $G(h^\pm)=M$.

定义

$$\tau^+(h)=\tau(0,h)=\sqrt{2}\int_0^h\frac{ds}{\sqrt{G(h)-G(s)}},$$

其中 $h>0$ 为充分大的正实数.

类似地, 对每一个 g_i $(i=1,\dots,d)$, 可定义

$$\tau_i^+(h)=\tau_i(0,h)=\sqrt{2}\int_0^h\frac{ds}{\sqrt{G_i(h)-G_i(s)}},$$

其中 $h>0$ 为充分大的正实数.

假设

(τ_∞^+) $\lim_{h\to+\infty}\tau_i^+(h)=\infty,\ i=1,\dots,d$.

函数 u 称为方程 (1.1) 的周期解是指 u 是 (1.1) 的解且对每一个 $i=1,\dots,d$, 有 $u_i(0)=u_i(2\pi)$, $u_i'(0)=u_i'(2\pi)$.

对于高维耦合系统的研究, 由于其在物理、力学、工程以及电子、生物等许多领域的应用而广受关注. 其中, 针对高维耦合系统的周期解问题, 长期以来, 由于缺乏相应的研究框架和方法, 通常只能得到系统周期解的存在性结果, 而对于周期解的多解性问题无能为力. 所使用的方法大多是运用非线性泛函的方法如拓扑度 [10–15] 及临界点理论 [1, 2] 等. 因此, 对于解的动力行为的刻画略显单一.

当 $q_i(t)\equiv 1$ 时, 在 g_i $(i=1,\dots,d)$ 满足一类超线性条件下, 文 [4] 运用拓扑度的方法证明了 (1.1) 一个调和解的存在性. 最近, Fonda 等人将丁伟岳 [5] 关于推广的 Poincaré–Birkhoff 扭转不动点定理的证明推广到高维 Hamilton 系统中去, 得到了针对高维保守系统扭转不动点定理 [8, 9].

运用这个定理, 推广了文 [4] 中的结果, 得到一类超线性弱耦合系统无穷多个调和解的存在性 [8]. 另外, 我们注意到文 [3] 也讨论了运用一类单调扭转定理证明一类超线性微分方程系统无穷多个调和解和次调和解的存在性. 在文 [3] 中, 所讨论的系统必须满足一定的光滑性条件.

本文将运用文 [8] 中的高维版推广的 Poincaré–Birkhoff 扭转不动点定理来研究一类次线性弱耦合格点系统周期解的存在性和多解性问题.

主要结论是:

定理 1.1　假设 $(g_0),(\tau_\infty^+)$ 成立, 则系统 (1.1) 至少存在一个 2π- 周期解. 同时, 存在无穷多个充分大的正整数 m, 使得 (1.1) 存在 $2m\pi$- 周期解 $u_m(t)$, 且对任意的正整数 $1\le k\le m-1$, $u_m(t)$ 不是 $2k\pi$- 周期解.

注 1.2　由于在系统 (1.1) 中 $p_i(t,u)$ 同时依赖于时间 t 和 u, 不能断定 $2m\pi$ 是最小正周期. 因此, 并不能确定 $u_m(t)$ 是否是方程 (1.1) 的次调和解.

2　预备工作

2.1　等价系统

考虑方程 (1.1) 的等价系统

$$\begin{cases} u_i'=v_i, \\ v_i'=-q_i(t)g_i(u_i)+p_i(t,u), \end{cases}\qquad i=1,\dots,d. \tag{2.1}$$

.

在下文的证明中, 为了讨论的简洁性, 不失一般性, 不妨假设 $g_i(0)=0$ $(i=1,\dots,d)$. 事实上, 如果 $g_i(0)\neq 0$, 则我们可以重新定义函数 $\hat g_i(u_i)=g_i(u_i)-g_i(0)$, 显然 $\hat g_i(0)=0$ 且方程 (1.1) 等价于方程

$$u_i''+q_i(t)\hat g_i(u_i)=\hat q_i(t,u),\quad i=1,\dots,d,$$

其中 $\hat q_i(t,u)=p_i(t,u)-q_i(t)g_i(0)$.

设截断函数 $\eta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续, 满足

$$\eta(a,b):=\begin{cases} 0, & |(a,b)|\le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & |(a,b)|>1, \end{cases}$$

且 $|\eta(a,b)|\le 1$. 定义新的系统

$$\begin{cases} u_i'=v_i, \\ v_i'=-q_i(t)g_i(u_i)+\eta(u_i,v_i)\cdot p_i(t,u), \end{cases}\qquad i=1,\dots,d. \tag{2.2}$$

.

对每一个 $i=1,\dots,d$, 在分平面 U_iOV_i 的原点附近, 方程

$$\begin{cases} u_i'=v_i, \\ v_i'=-q_i(t)g_i(u_i)+\eta(u_i,v_i)\cdot p_i(t,u) \end{cases} \tag{2.3}$$

为

$$u_i'=v_i,\quad v_i'=-q_i(t)g_i(u_i). \tag{2.4}$$

容易看出此时原点为 (2.4) 的平衡点, 由 $|\frac{g_i(u_i)}{u_i}|\le l_i$ 易证, 当 $(u_i(0),v_i(0))\neq(0,0)$ 时, 系统 (2.4) 的解在有限时间内不通过原点. 从而平面 U_iOV_i 原点外 (2.3) 的解有限时间内都不会经过原点.

在半径为 1 的圆域之外系统 (2.3) 为

$$u_i' = v_i, \quad v_i' = -q_i(t)g_i(u_i) + p_i(t,u),$$

显然此时与原系统 (2.1) 一样. 从而, 系统 (2.2) 的任一满足 $|(u_i(t), v_i(t))| \geq 1$ $(i = 1, \ldots, d)$ 的解都是原系统 (2.1) 的解.

2.2 引理

令 $x = \mathrm{col}(x_i)_{i=1,\ldots,2d} = (u_1, v_1, \ldots, u_d, v_d)$, 则 (2.2) 可写成

$$\begin{cases} x_{2i-1}' = x_{2i}, \\ x_{2i}' = -q_i(t)g_i(x_{2i-1}) + \eta(x_{2i-1}, x_{2i}) \cdot p_i(t,y), \end{cases} \quad i = 1, \ldots, d, \tag{2.5}$$

其中 $y = (x_1, x_3, \ldots, x_{2d-1})$.

设 $x^0 \in \mathbb{R}^{2d}$ 且 $x(t; x^0)$ 为方程 (2.5) 满足初值 $x(0) = (u_1(0), v_1(0), \ldots, u_d(0), v_d(0)) := x^0$ 的解. 对每一个 $i = 1, \ldots, d$, 令

$$X_i^0 := \Pi_i x^0 = (x_{2i-1}^0, x_{2i}^0)$$

和

$$(x_{2i-1}(t, x^0), x_{2i}(t, x^0)) := \Pi_i(x(t, x^0)),$$

其中 $\prod_i : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^2$ 表示相空间 $\mathbb{R}^{2d}$ 到相平面 U_iOV_i 的投影映射. 可以证明, 对任意的 $x^0 \in \mathbb{R}^{2d}$, 解 $x(t; x^0)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义. 事实上, 我们有

引理 2.1 对每一个 $i = 1, \ldots, d$ 及任意的 $T > 0$ 和 $r_{i,1} \geq 0$, 都存在一个 $r_{i,2} := r_{i,2}(r_{i,1}, T) > 0$, 使得对 $|t| \leq T$, 都有

$$(x_{2i-1}^2(0) + x_{2i}^2(0))^{\frac{1}{2}} \leq r_{i,1} \Rightarrow (x_{2i-1}^2(t) + x_{2i}^2(t))^{\frac{1}{2}} \leq r_{i,2}.$$

推论 2.2 对每一个 $i = 1, \ldots, d$ 及任意的 $T > 0$ 和 $r_{i,1} > 0$, 都存在一个常数 $r_{i,2} := r_{i,2}(r_{i,1}, T) > 0$, 使得只要 $|(x_{2i-1}(0), x_{2i}(0))| > r_{i,2}$, 则对任意的 $t \in [-T, T]$, 有

$$|(x_{2i-1}^2(t) + x_{2i}^2(t))| \geq r_{i,1}.$$

对每个 $i = 1, \ldots, d$, 取定一个正数 $\delta_i > 0$ (δ_i 充分小), 将相平面 U_iOV_i 分成四个区域:

$$\mathbf{I} := \{(u_i, v_i) : \delta_i \leq \theta \leq \pi - \delta_i\}, \quad \mathbf{II} := \{(u_i, v_i) : -\delta_i < \theta < \delta_i\}$$

$$\mathbf{III} := \{(u_i, v_i) : -\pi + \delta_i \leq \theta \leq -\delta_i\}, \quad \mathbf{IV} := \{(u_i, v_i) : \pi - \delta_i < \theta < \pi + \delta_i\}.$$

我们引进极坐标. 假设 $x^0 \in \mathbb{R}^{2d}$ 且 $X_i^0 := (x_{2i-1}^0, x_{2i}^0) \neq (0,0)$, 则解 $(x_{2i-1}(t, x^0), x_{2i}(t, x^0))$ 可以用极坐标表示

$$\begin{cases} x_{2i-1}(t) = r_i(t) \cos \theta_i(t), \\ x_{2i}(t) = r_i(t) \sin \theta_i(t), \end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $r_i(t), \theta_i(t)$ 是连续函数. 易证, 在坐标变换 (2.6) 下, $(r_i(t), \theta_i(t))$ 满足方程

$$\begin{cases} r_i' = r_i \sin \theta_i(t) \cos \theta_i(t) - q_i(t) g_i(u_i) \sin \theta_i(t) + \eta(u_i, v_i) p_i(t,y) \sin \theta_i(t), \\ \theta_i' = -\sin^2 \theta_i - \dfrac{q_i(t) g_i(u_i)}{u_i} \cos^2 \theta_i(t) + \eta(u_i, v_i) \cdot \dfrac{p_i(t,y)}{r_i} \cos \theta_i(t), \end{cases} \quad i = 1, \ldots, d, \tag{2.7}$$

其中 $u_i(0) = r_i(0) \cos \theta_i(0)$, $v_i(0) = r_i(0) \sin \theta_i(0)$.

容易验证:

引理 2.3 对每一个 $i=1,\ldots,d$, 存在正数 $R_i^{(0)}>1$, 对 (2.5) 的任意解 $x(t)$, 若 $r_i(t)>R_i^{(0)}$, 则 $\theta_i'(t)<0$.

证明 由 (g_0) 知存在一个 $M_i^0>0$, 对任意的 $|u_i|\ge M_i^0$, 有 $g_i(u_i)\cdot u_i>0$.

在区域 **I** 内, 取 $A_i^1>0$, 使得当 $r_i>A_i^1$ 时, 有

$$\frac{P_i}{r_i}<\frac{\sin^2\delta_i}{4},$$

其中 P_i 由 (p_0) 定义. 一方面, 当 $|u_i|\le M_i^0$ 时, 易见 $|g_i(u_i)|$ 有界. 因此, 取 A_i^1 适当大, 当 $r_i\ge A_i^1$ 时, 有

$$\left|\frac{q_i(t)g_i(u_i)}{r_i}\right|\le\left|\frac{q_i^0g_i(u_i)}{r_i}\right|<\frac{\sin^2\delta_i}{4},$$

其中 $q_i^0=\max_{[0,2\pi]}\{q_i(t)\}$. 另一方面, 当 $|u_i|>M_i^0$ 时, 易见

$$q_i(t)\cdot\frac{g_i(u_i)}{u_i}>0.$$

从而在区域 **I** 内

$$\theta_i'(t)<-\sin^2\delta_i+\frac{\sin^2\delta_i}{2}=-\frac{\sin^2\delta_i}{2}<0.$$

易见, 在区域 **III** 内, 当 $r_i(t)>A_i^1$ 时也有 $\theta_i'(t)<0$.

在区域 **II** 内, $u_i\ge r_i\cos\delta_i$. 由 (g_0) 知, 存在 $A_i^2>0$, 使得当 $r_i>A_i^2$ 时, $q_i^1g_i(u_i)>2P_i$, 其中 $q_i^1=\min_{[0,2\pi]}\{q_i^1(t)\}$. 同时注意到, 此时

$$-\frac{q_i(t)g_i(u_i)}{u_i}\cos^2\theta(t)<0,$$

所以

$$-\frac{q_i(t)g_i(u_i)}{u_i}\cos^2\theta_i(t)+\eta(u_i,v_i)\cdot\frac{p_i(t,u_i)}{r_i}\cos\theta_i(t)\le-\frac{P_i}{r_i}\cos\delta_i<0.$$

从而由 (2.7) 知 $\theta_i'(t)<0$.

在区域 **IV** 内有类似讨论. 取 $R_i^0:=\max\{A_i^1,A_i^2\}$, 则 R_i^0 满足引理要求. 证毕.

类似于文 [6] 中的证明, 我们有

引理 2.4 设 (g_0) 和 (τ_∞^+) 成立且 $x(t)=(u_1(t),v_1(t),\ldots,u_d(t),v_d(t))$ 是方程 (2.2) 的解. 对每一个 $i=1,\ldots,d$, 若

$$r_i(t)\ge R_i^{(1)}>R_i^{(0)},\quad 0<t_1\le t\le t_2\quad 和\quad \theta_i(t_2)-\theta_i(t_1)=-2\pi,$$

则

$$\lim_{R_i^{(1)}\to\infty}(t_2-t_1)\to\infty,$$

其中 $(r_i(t),\theta_i(t))$ $(i=1,\ldots,d)$ 由 (2.6) 定义.

引理 (2.4) 指出, 在条件 (τ_∞^+) 下, 系统 (2.2) 的解在分平面 U_iOV_i $(i=1,\ldots,d)$ 上的范数越大, 则解 $(x_{2i-1}(t),x_{2i}(t))$ 在相平面 U_iOV_i 上经过区域 **II** 就越慢, 从而绕原点转一圈所需要的时间就越长. 下面, 类似于文 [7, 引理 1] 的证明方法, 我们可以证明:

引理 2.5 对每一个 $i=1,\dots,d$ 存在 $\nu_i>\frac{1}{2}$, 对于每一个 $R_i>R_i^{(0)}$ 都存在 $L_i(R_i)>R_i$, 使得如果 $x(t)=(u_1(t),v_1(t),\dots,u_d(t),v_d(t))$ 是方程 (2.2) 的解满足 $r_i(t_1)=L_i(R_i)$, $r_i(t_2)=R_i$ (或者 $r_i(t_1)=R_i$, $r_i(t_2)=L_i(R_i)$), 及

$$R_i\le r_i(t)\le L_i(R_i),\quad \forall\, t\in[t_1,t_2],$$

则

$$\theta_i(t_2)-\theta_i(t_1)<-\nu_i\cdot 2\pi.$$

证明 由 $(g_0),(p_0)$ 知存在一个 $M_i^{(1)}>R_i^{(0)}$, 对任意的 $u\in\mathbb{R}^{2d}$ 且 $|u_i|\ge M_i^{(1)}$, 有 $[q_i^{(1)}g_i(u_i)-p_i(t,u)]\cdot\operatorname{sgn}(u_i)>P_i$, 其中 $q_i^{(1)}:=\min_{t\in[0,2\pi]}q_i(t)$. 取 $\varepsilon\in(0,\frac{P_i}{2})$, 定义函数 $\hat{g}_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\hat{g}_i(u_i)=\min\left\{\frac{P_i}{2},\,\inf\{q_i(t)g_i(\xi)-P_i-\varepsilon:t\in\mathbb{R},\,\xi\ge u_i\}\right\}.$$

易见, 当 u_i 为充分大的正数时, $q_i(t)g_i(\xi)-P_i-\varepsilon>\frac{P_i}{2}$, 从而有 $\hat{g}_i(u_i)=\frac{P_i}{2}$. 由构造知 $\hat{g}_i$ 是单调非减函数并且对任意的 $u_i\in\mathbb{R}$ 及 $t\in[0,2\pi]$, 都有

$$\hat{g}_i(u_i)\le q_i(t)g_i(u_i)-P_i-\varepsilon.$$

易见, 我们可以定义一个连续的单调非减函数 $\tilde{g}_i$, 使得对所有的 $u_i\in\mathbb{R}$, 有 $\tilde{g}_i(u_i)\le\hat{g}_i(u_i)$, 并且对充分大的正数 u_i, $\tilde{g}_i(u_i)=\frac{P_i}{2}$. 类似地, 可以定义一个连续的单调非减函数 $h_i(u_i)$, 使得对所有的 $u_i\in\mathbb{R}$ 及任意的 $t\in[0,T]$, 有

$$h_i(u_i)\ge q_i(t)g_i(u_i)+P_i+\varepsilon,$$

且当 $u_i<0$ 并且 $|u_i|$ 充分大时, 有 $h_i(u_i)=-\frac{P_i}{2}$.

定义

$$G_i(u_i)=\int_0^{u_i}\tilde{g}_i(s)ds,\quad H_i(u_i)=\int_0^{u_i}h_i(s)ds.$$

显然

$$G_i(u_i)<H_i(u_i),\ \text{当}\ u_i>0;\quad G_i(u_i)>H_i(u_i),\ \text{当}\ u_i<0.$$

而且, 由于当 $u_i>0$ 充分大时, 有 $\tilde{g}_i(u_i)=\frac{p_i^{(0)}}{2}$, 所以

$$\lim_{u_i\to+\infty}G_i(u_i)\to+\infty.$$

类似地, 有

$$\lim_{u_i\to-\infty}H_i(u_i)\to+\infty.$$

取 $R_i>R_i^{(0)}$, 令 $B[R_i]:=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:a^2+b^2\le R^2\}$ 且取 $k_i>0$, 使得对任意的 $(u_i,v_i)\in B[R_i]$, 有

$$\frac{v_i^2}{2}+H_i(u_i)<k_i,\quad \frac{v_i^2}{2}+G_i(u_i)<k_i.$$

取 $\alpha_i<0$, 使得 $H_i(\alpha_i)=k_i$. 在 u_i-v_i 平面上定义下列曲线

$$\Gamma_1^i:=\left\{(u_i,v_i):\frac{v_i^2}{2}+H_i(u_i)=H_i(\alpha_i),\,v_i\ge 0\right\},$$

$$\Gamma_2^i:=\left\{(u_i,v_i):\frac{v_i^2}{2}+G_i(u_i)=G_i(\alpha_i),\,v_i\le 0\right\}.$$

因为 H_i 是上凹的, 对每一个 $v_i \in \mathbb{R}$, 最多有两个数 $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$, 使得 $(u_i^{(1)}, v_i) \in \Gamma_1^i$, $(u_i^{(2)}, v_i) \in \Gamma_1^i$. 对 Γ_2^i 也有相同的结论. 显然, 存在 $\beta_i > R_i$, 使得 $H_i(\beta_i) = H_i(\alpha_i)$. 另外, 也存在 $\gamma_i > R_i$, 使得 $G_i(\gamma_i) = G_i(\alpha_i) > H_i(\alpha_i)$. 因为当 $u_i > 0$ 时, $G_i(u_i) < H_i(u_i)$, 所以有 $\gamma_i > \beta_i$. 现在, 令 $(u(t), v(t))$ 是 (2.2) 的解. 如果曲线 $t \mapsto (u_i(t), v_i(t))$ 穿过 Γ_1^i, 则必然是从内部向外部穿过. 事实上, 沿着方程 (2.3) 的解, 对 $v_i(t) > 0$, 我们有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_i^2}{2} + H_i(u_i)\right) = v_i[h_i(u_i) - (q_i(t)g_i(u_i) - p_i(t, \tilde{u}))] > 0,$$

这意味着在 Γ_1^i 上的每一点处, 方程 (2.3) 的向量场都是从内指向外的. 对 Γ_2^i 也有相同的结论. 同时, 易证, 在射线 $\{(u_i, 0) : u_i \geq \gamma_i\}$ 上, 向量场指向下方.

因此, 若 (u_i, v_i) 是方程 (2.2) 的解 $(u(t), v(t)) : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^{2d}$ 在分平面 U_iOV_i 上的投影且 $(u_i(t_1), v_i(t_1)) \in \{(u_i, v_i) : v_i \leq 0, \frac{v_i^2(t_1)}{2} + G_i(u_i(t_1)) > G_i(\gamma_i)\}$, 满足 $|(u_i(t_2), v_i(t_2))| = R_i$, 且 $|(u_i(t), v_i(t))| \geq R$, $\forall\, t \in [t_1, t_2]$, 则一定存在 $t_1 < \omega_i \leq t_2$, 使得

(a) $u_i(\omega_i) \geq \beta_i$, $v_i(\omega_i) = 0$;

(b) $\forall\, t \in [t_1, \omega_i)$, $(u_i(t), v_i(t))$ 与 Γ_1^i 与 Γ_2^i 不相交, 从而 $|(u_i(t), v_i(t))| > R_i$;

(c) $u_i'(t)$ 在 $[t_1, \omega_i]$ 内至少有两个零点.

这意味着曲线 $t \mapsto (u_i(t), v_i(t))$ 在穿过线段 $\{(u_i, 0) : \beta_i \leq u_i \leq \gamma_i\}$ 之前绕 $B[R_i]$ 至少旋转了 π, 即 $\theta(\omega_i) - \theta(t_1) \leq -\pi$. 注意到 (b) 以及 $R_i > R_0^{(0)}$, 有 $\theta_i(t_2) - \theta_i(t_1) < -\pi$.

对于满足 $(u_i(t_1), v_i(t_1)) \in \{(u_i, v_i) : v_i \geq 0\}$ 的解也有类似的构造及相应的讨论. 因此, 可以选择一个充分大的 $L_i(R_i) > R_i$, 使得定理的结论成立. 证毕.

推论 2.6 对每一个 $R_i > R_i^{(0)}$ 和正整数 j, 都存在 $L_i(R_i, j) > R_i$, 使得如果 $(u(t), v(t))$ 是方程 (2.2) 的解满足 $r_i(t_1) = L_i(R_i, j)$, $r_i(t_2) = R_i$ (或者 $r_i(t_1) = R_i$, $r_i(t_2) = L_i(R_i, j)$) 及

$$R_i \leq r_i(t) \leq L_i(R_i, j), \quad \forall\, t \in [t_1, t_2],$$

则

$$\theta_i(t_2) - \theta_i(t_1) < -2j\pi.$$

证明 由引理 2.5, 令 $\nu_i = \delta_i + \frac{1}{2}$, 则 $\delta_i > 0$. 固定 $R_i > R_i^{(0)}$, 由引理 2.5, 令 $R_i^{(1)} := L_i(R_i) > R_i$ 并且 $R_i^{(2)} := L_i(R_i^{(1)})$. 设 $(u(t), v(t))$ 是 (2.2) 的解满足: $r_i(t_1) = R_i^{(2)}$, $r_i(t_2) = R_i$ 且对任意 $t \in [t_1, t_2]$, 有 $R_i \leq r_i(t) \leq R_i^{(2)}$. 令 s_1 和 s_2 分别是 $[t_1, t_2]$ 内满足 $r_i(t) = R_i^{(1)}$ 的第一个时刻和最后一个时刻. 注意到 $\theta_i(s_2) - \theta_i(s_1) < 0$, 从而

$$\begin{aligned}\theta_i(t_2) - \theta_i(t_1) &= (\theta_i(t_2) - \theta_i(s_2)) + (\theta_i(s_2) - \theta_i(s_1)) + (\theta_i(s_1) - \theta_i(t_1)) \\ &< -\left(\delta_i + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi - \left(\delta_i + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi = -(2\delta_i + 1) \cdot 2\pi.\end{aligned}$$

令 $R_i^{(3)} := L_i(R_i^{(2)})$, 类似可证, 如果 $(u(t), v(t))$ 是 (2.2) 的解满足 $r_i(t_1) = R_i^{(3)}$, $r_i(t_2) = R_i$ (或者 $r_i(t_1) = R_i$, $r_i(t_2) = R_i^{(3)}$) 及

$$R_i \leq r_i(t) \leq R_i^{(3)}, \quad \forall\, t \in [t_1, t_2],$$

则

$$\theta_i(t_2) - \theta_i(t_1) < -\left(3\delta_i + \frac{3}{2}\right) \cdot 2\pi.$$

反复进行上述讨论, 则对每一个 $j > 0$, 可以找到一个 $L_i(R_i, j) > R_i$, 使得结论成立. 证毕.

引理 2.7 设 $R_i^{(2)} > R_i^{(1)} > R_i^{(0)}$ 是充分大的正数, $(u(t),v(t))$ 是 (2.2) 的一个解满足

$$R_i^{(1)} \le r_i(t) \le R_i^{(2)}, \quad \forall\, t \ge t_0,$$

则

$$\theta_i(t) - \theta_i(t_0) \to -\infty, \quad t \to +\infty$$

对 $t_0 \in [0,2\pi]$ 一致成立.

证明 由 θ_i' 的连续性知, 存在 $a_i > b_i > 0$, 使得 $-a_i < \theta_i' < -b_i$. 从而 $\theta_i(t) - \theta_i(t_0) < -b_i(t-t_0)$. 得证.

注 2.8 引理 2.7 中, a_i, b_i 的大小只与 i 以及 $R_i^{(2)} > R_i^{(1)}$ 的选取有关.

3 定理的证明

3.1 高维版的 Poincaré–Birkhoff 扭转不动点定理

为了完成主要结果的证明, 我们应用文 [9] (可见文 [8, 定理 5]) 中一个针对 Hamilton 系统 Poincaré 映射的高维版的 Poincaré–Birkhoff 扭转不动点定理.

令 $0 < R_1^i < R_2^i$ $(i = 1,\dots,N)$, 考虑 $\mathbb{R}^{2N}$ 中的 N- 环面

$$\Omega = (\overline{B}_{R_2^1} \backslash B_{R_1^1}) \times (\overline{B}_{R_2^2} \backslash B_{R_1^2}) \times \dots \times (\overline{B}_{R_2^N} \backslash B_{R_1^N}).$$

定理 3.1 (文 [9, 定理 1.2]) 任取 $m \in \mathbb{Z}^+$, 设只要 $z(t)$ 是方程

$$\begin{cases} u_i' = v_i, \\ v_i' = -q_i(t) g_i(u_i) + p_i(t,u), \end{cases} \qquad i = 1,\dots,N \tag{3.1}$$

满足 $z(0) \in \Omega$ 的任意解, 就有 $z(t)$ 在 $[0,2m\pi]$ 上有定义, 且对每一个 $i = 1,\dots,N$ 和 $t \in [0,2m\pi]$, 有

$$z_i(t) \ne (0,0).$$

进一步, 假设存在 N 个正数 $K_1, K_2, \dots, K_N$, 使得对每一个 $i = 1,\dots,N$, 都有

$$\theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) < -2K_i\pi,\ 若\ |z_i(0)| = R_1^i;\ 且\ \theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) > -2K_i\pi,\ 若\ |z_i(0)| = R_2^i.$$

则此方程至少存在 $N+1$ 个几何上不同的 $2m\pi$- 周期解 $z(t)$, $z(0) \in \Omega$, 满足对每一个 $i = 1,\dots,N$, 有 $\theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) = -2K_i\pi$.

3.2 定理 1.1 的证明

证明 下面证明存在无穷多个充分大的正整数 m, 使得 (2.2) 存在 $2m\pi$- 周期解.

首先, 对每一个 $i = 1,\dots,d$, 固定正整数 $k_i \in \mathbb{Z}^+$. 由推论 2.6, 对每一个 $i = 1,\dots,d$, 取 $R_i^{(1)} > R_i^{(0)}$, $R_i^{(2)} := L(R_i^{(1)}, k_i+1)$, $R_i^{(3)} := L(R_i^{(2)}, k_i+1)$, 且设 $x(t)$ 为方程 (2.2) 的任一个解, 则只要 $x_i(t) := (u_i(t), v_i(t))$ 在相平面 U_iOV_i 上穿过 $B[R_i^{(2)}] \setminus B(R_i^{(1)})$, 或 $B[R_i^{(3)}] \setminus B(R_i^{(2)})$, 那么 $x_i(t)$ 绕相平面 U_iOV_i 的原点至少旋转了 k_i+1 圈. 令 $\mathscr{A}_i := B[R_i^{(3)}] \setminus B(R_i^{(1)})$. 由引理 2.7 知存在 $m_{i,k_i}^* \in \mathbb{Z}^+$, 对任意 $m_i \ge m_{i,k_i}^* (m_i \in \mathbb{Z}^+)$, 如果 $\forall\, t \in [0, 2m_i\pi]$, 都有 $R_i^{(1)} \le r_i(t) \le R_i^{(3)}$, 则有

$$\theta_i(2m_i\pi) - \theta_i(0) < -2k_i\pi.$$

取 $m^d := \max\{m^*_{i,k_i} : i = 1, \dots, d\}$, 易见, 对 $\forall\, m \geq m^d$ 及每一个 $i = 1, \dots, d$, 如果 $\forall\, t \in [0, 2m\pi]$, 都有 $R_i^{(1)} \leq r_i(t) \leq R_i^{(3)}$, 则有

$$\theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) \leq \theta_i(2m^*_{i,k_i}\pi) - \theta_i(0) < -2k_i\pi.$$

设 $(r(t), \theta(t))$ 是方程 (2.7) 的解, $r_i(0) = R_i^{(2)}$, 满足:

- 或者 $(u_i(t), v_i(t)) \in \mathscr{A}_i$, $\forall\, t \in [0, 2m\pi]$, 其中 $(u_i(t), v_i(t))$ 由 (2.6) 给出;
- 或者存在 $\hat{t}_i \in (0, 2m\pi)$, 使得 $(u_i(\hat{t}_i), v_i(\hat{t}_i)) \bar{\in} \mathscr{A}_i$.

对前一种情况已知 $\theta(2m\pi) - \theta(0) < -2k_i\pi$. 对后一种情况, 可以选择一个区间 $[t_{i,1}, t_{i,2}] \subset [0, 2m\pi]$, 使得

- 或者 $r_i(t_{i,1}) = R_i^{(2)}$, $r_i(t_{i,2}) = R_i^{(1)}$ 且 $\forall\, t \in [t_{i,1}, t_{i,2}]$, 有 $R_i^{(1)} \leq r_i(t) \leq R_i^{(2)}$;
- 或者 $r_i(t_{i,1}) = R_i^{(2)}$, $r_i(t_{i,2}) = R_i^{(3)}$ 且 $\forall\, t \in [t_{i,1}, t_{i,2}]$, 有 $R_i^{(2)} \leq r_i(t) \leq R_i^{(3)}$.

由 $R_i^{(1)}, R_i^{(2)}$ 和 $R_i^{(3)}$ 的选取, 无论哪种情况都有 $\theta_i(t_{i,2}) - \theta_i(t_{i,1}) < -2(k_i + 1)\pi$. 注意到 $[\theta_i(2m\pi) - \theta_i(t_{i,2})] + [\theta_i(t_{i,1}) - \theta_i(0)] < 2\pi$, 因此 $\theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) < -2k_i\pi$. 综上所述, 若 $(r(t), \theta(t))$ 是方程 (2.7) 的解, 则

$$r_i(0) = R_i^{(2)} \Rightarrow \theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) < -2k_i\pi.$$

现在, 固定 $m \geq m^d$. 由引理 2.4 知存在 $S_i^{(1)} > R_i^{(2)}$, 使得如果 $(r(t), \theta(t))$ 是方程 (2.7) 的满足 $\forall\, t \in [0, 2m\pi]$, 都有 $r_i(t) \geq S_i^{(1)}$ 的解, 则 $\theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) > -2\pi$. 再由推论 2.2, 存在 $S_i^{(2)} > S_i^{(1)}$, 使得对任意的 (2.7) 的满足 $r_i(0) \geq S_i^{(2)}$ 的解, $(r(t), \theta(t))$ 都满足

$$r_i(t) \geq S_i^{(1)}, \quad \forall\, t \in [0, 2m\pi].$$

所以

$$r_i(0) = S_i^{(2)} \Rightarrow \theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) > -2\pi.$$

考虑系统 (2.7) 的 $2m\pi$-Poincaré 映射:

$$[(0, +\infty) \times \mathbb{R}]^d \ni (r_0, \theta_0) \mapsto (r(2m\pi; 0, r_0, \theta_0), \theta(2m\pi; 0, r_0, \theta_0)).$$

取 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的 d- 环面

$$\Omega = \big(\overline{B}_{S_1^{(2)}} \backslash B_{R_1^{(2)}}\big) \times \ldots \times \big(\overline{B}_{S_N^{(2)}} \backslash B_{R_N^{(2)}}\big).$$

容易检验定理 3.1 的所有条件均满足, 从而由定理 3.1 知, 方程 (2.2) 至少存在 $d+1$ 个不同的 $2m\pi$- 周期解 $x^1(t), x^2(t), \dots, x^{d+1}(t)$. 对每一个 $j = 1, \dots, d+1$, 都有

$$x^j(0) \in \Omega,$$

且对每个 $i = 1, \dots, d$,

$$\theta_i^j(2m\pi) - \theta_i^j(0) = -2k_i\pi,$$

即 $x_{2i-1}(t)$ 在 $[0, 2m\pi]$ 内恰好有 $2k_i$ 个零点.

由 $R_i^{(2)}$ 的定义可知 $\forall\, t \in [0, 2m\pi]$, $r_i(t) > R_i^{(1)}$. 否则, 由上述讨论知 $\theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) < -2k_i\pi$, 这与 $\theta_i(2m\pi) - \theta_i(0) = -2k_i\pi$ 矛盾. 因此, $x^j(t)$ $(j = 1, \dots, d+1)$ 是方程 (2.1) 的 $d+1$ 个 $2m\pi$- 周期解, 即 $u^j(t)$ $(j = 1, \dots, d+1)$ 是方程 (1.1) 的 $d+1$ 个 $2m\pi$- 周期解.

显然, 若存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, 使得 k_i 和 m 互素并且 $u(t)$ 是方程 (1.1) 的 $2m\pi$- 周期解, 则易见不存在正整数 $1 \leq k \leq m-1$, 使得 $u(t)$ 为 $2k\pi$- 周期解.

最后, 一方面, 由引理 2.4 知存在充分大的实数 $R^{(1)} > 0$, 使得如果 $(r(t), \theta(t))$ 是方程 (2.7) 的一个解, 且存在某个 $i \in \{1, \dots, d\}$ 满足 $r_i(0) > R^{(1)}$, 则有

$$\theta_i(2\pi) - \theta_i(0) > -2\pi;$$

另一方面, 令 $R^{(2)} > \sqrt{d}R^{(1)}$, 则对每一个 $x_0 \in \partial B(R^{(2)})$ 必存在 $i \in \{1, \dots, d\}$ 满足 $|\Pi_i(x_0)| > R^{(1)}$.

定义 2π-Poincaré 映射如下:

$$\begin{aligned} &P_{2\pi} : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}, \\ &x_0 \mapsto x(2\pi; x_0). \end{aligned} \tag{3.2}$$

由上述分析易见, 对任意的 $x_0 \in \partial B(R^{(2)})$ 以及任意的 $L_i \geq 1$, 都有

$$P_{2\pi}(x_0) \neq L_i x_0.$$

根据 Poincaré–Bohl 定理, 方程 (1.1) 至少存在一个 2π- 周期解. 证毕.

致谢 衷心感谢审稿人的指正和有益的建议.

参 考 文 献

[1] Arioli G., Chabrowski J., Periodic motions of a dynamical system consisting of an infinite lattice of particles, *Dynam. Systems Appl.*, 1997, **6**(3): 287–396.

[2] Bahri A., Berestycki A., Existence of forced oscillations for some nonlinear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1984, **37**(4): 403–442.

[3] Boscaggin A., Ortega R., Monotone twist maps and periodic solutions of systems of Duffing type, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2014, **157**(2): 279–296.

[4] Capietto A., Mawhin J., Zanolin F., A continuation approach to superlinear periodic boundary value problem, *J. Differential Equations*, 1990, **88**(2): 347–395.

[5] Ding W., A generalization of the Poincaré–Birkhoff theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1983, **88**(2): 341–346.

[6] Ding T., Zanolin F., Subharmonic solution of second order nonlinear equations: a time-map approach, *Nonl. Anal. TMA*, 1993, **20**(5): 509–532.

[7] Fabry C., Habets P., Periodic solutions of second order differential equations with superlinear asymmetric nonlinearities, *Arch. Math.*, 1993, **60**(3): 266–276.

[8] Fonda A., Sfecci A., Periodic solutions of weakly coupled superlinear systems, *J. Differential Equations*, 2016, **260**(3): 2150–2162.

[9] Fonda A., Ureña A. J., A higher dimensional Poincaré–Birkhoff theorem for Hamiltonian flows, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire*, 2017, **34**(3): 679–698.

[10] Torres P. J., Zanolin F., Periodic motion of a system of two or there charged particles, *J. Math. Anal. Appl.*, 2000, **250**(2): 375–386.

[11] Torres P. J., Periodic motions forced infinite lattices with nearest neighbor interaction, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2000, **51**(3): 333–345.

[12] Torres P. J., Necessary and sufficient conditions for existences of periodic motions of forced systems of particles, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2001, **52**(3): 535–540.

[13] Wang C., Qian D. B., Periodic motions of a class of forced infinite lattices with nearest neighbor interaction, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **340**(1): 44–52.

[14] Wang C., Qian D. B., The existence of periodic solutions for a class of nonautonomous lattices with bounded-coupling, *Nonlinear Anal. TMA*, 2009, **71**(5): 1438–1444.

[15] Wang C., A continuation approach to the periodic boundary value problem for a class of nonlinear coupled oscillators with potential depending on time, *Adv. Nonlinear Stud.*, 2016, **16**(2): 185–196.