四. 随机过程的数字特征

本节内容包括:

- 随机过程的数字特征
- 两个随机过程的数字特征
- 复随机过程的数字特征

1. 均值函数

设 $X=\{X_t, t\in \mathrm{T}\}$ 是一实值随机过程，若对任意 $t\in \mathrm{T}$, 有

$$\mathrm{E}[X_t] \text{ 存在}$$

则称 $\mathrm{E}[X_t]$为随机过程X的均值函数，记为$m_X(t)$.

2. 方差函数

设 $X=\{X_t, t\in T\}$是一实值随机过程，对任意$t\in T$，若

$$E[X_t - m_X(t)]^2 \text{ 存在}$$

则称之为随机过程X的方差函数，记为$D_X(t)$.

3. 协方差函数

设 $X=\{X_t, t\in T\}$ 是一实值随机过程，对任意$s,t\in T$，若

$$Cov(X_s, X_t)=E[[X_s-m_X(s)][X_t-m_X(t)]]$$ 存在

则称之为随机过程X的协方差函数.记为$C_X(s,t)$.

4. 相关函数

设 $X=\{X_t, t\in \mathrm{T}\}$ 是一实值随机过程，对任意$s,t\in$T，若

$$\mathrm{E}[X_s X_t]\ \text{存在}$$

则称之为随机过程X的(自)相关函数.记为 $R_X(s,t)$.

5. 均方值函数

设 $X=\{X_t, t\in \mathrm{T}\}$ 是一实值随机过程，对任意 $t\in \mathrm{T}$, 若

$$\mathrm{E}[X_t]^2 \text{ 存在}$$

则称之为随机过程X的均方值函数.记为 $\Phi_X(t)$.

随机过程的数字特征有如下关系

$$C(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$$

$$D_X(t) = C_X(t,t)$$

$$\Phi_X(t) = R_X(t,t)$$

熟悉数字特征的计算

补例1. 设随机过程$X=\{X_t=a\cos(\omega t+\Theta), t\in(-\infty,+\infty)\}$
其中a, ω为常数, Θ~U[0, 2π] .
求随机过程X的均值函数,相关函数和方差函数.

解 $$m_X(t)=\mathrm{E}[X_t]$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cdot a\cos(\omega t+\theta)d\theta=0 \qquad -\infty<t<+\infty$$

$$R_X(s,t)=\mathrm{E}[X_sX_t]$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}a^2\cos(\omega s+\theta)\cos(\omega t+\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s), \qquad -\infty<s,t<+\infty$$

$$\because C_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)$$

$$=R_X(s,t)$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s), \qquad -\infty<s,t<+\infty$$

$$\therefore D_X(t)=C_X(t,t)=\frac{a^2}{2} \qquad -\infty<t<+\infty$$

例2.3.8 验证：正态过程的有限维分布由其均值函数和相关函数确定。

提示：利用特征函数.

设X=$\{X_t, t\in R\}$为正态过程，则对任意的正整数n，及任意的$t_1, t_2, \cdots, t_n \in R$,

n维向量$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$为n维正态随机向量，其特征函数为

$$\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=e^{(j\mu u^T-\frac{1}{2}uCu^T)}$$

$$=e^{j\sum_{k=1}^{n}m_X(t_k)u_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}u_k u_l\,Cov(X_{t_k},X_{t_l})}$$

其中，μ和C分别是向量$(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$的均值向量和协方差矩阵.

例2.3.10 设 $X=\{X_t,t\in[a,b]\}$ 是正交增量过程，

且 $X_a=0$ 则

(1) $R_X(s,t)=\Phi_X(\min(s,t))\quad s,t\in[a,b]$

(2) $\Phi_X(t)$是单调不减函数

两个随机过程的互相关函数与互协方差函数

设$\{X_t, Y_t, t\in T\}$为二维随机过程, 对任意$s,t\in T$, 若

$$E[X_s Y_t]\text{ 存在}$$

则称之为该二维随机过程的互相关函数,记 $R_{XY}(s,t)$.

若 $Cov(X_s, Y_t) = E[(X_s - m_X(s))(Y_t - m_Y(t))]$ 存在

则称之为该二维随机过程的互协方差函数,记$C_{XY}(s,t)$.

互协方差函数可以定义两个过程的相关性

设有随机过程X={X_t, t∈T}和Y={Y_t, t∈T}, 对任意的 s,t∈T, 若

$$C_{XY}(s,t)=Cov(X_s,Y_t)=0$$

则称随机过程X和Y**不相关**。

复随机过程的数字特征

设$Z=\{Z_t, t\in T\}$是复随机过程, 对任意$t\in T$, 称

$$m_Z(t)=E[Z_t]$$

为复随机过程Z的均值函数.

称

$$D_Z(t)=D[Z_t]=E\left|Z_t-m_Z(t)\right|^2$$

为复随机过程Z的方差函数.

称 $\Phi_Z(t) = \mathrm{E}|Z_t|^2$

为复随机过程Z的均方值函数.

对任意的$s,t \in T$,称

$$R_Z(s,t) = \mathrm{E}[\overline{Z}_s Z_t]$$

为复随机过程Z的相关函数.

称 $C_Z(s,t) = Cov(Z_s, Z_t)$

$$= \mathrm{E}[(\overline{Z_s - m_Z(s)})(Z_t - m_Z(t))]$$

为复随机过程Z的协方差函数.

由以上定义可得

$$m_Z(t) = m_X(t) + jm_Y(t),\ t \in T$$

$$D_Z(t) = D_X(t) + D_Y(t),\ t \in T$$

$$C_Z(s,t) = R_Z(s,t) - \overline{m_Z(s)}m_Z(t),\ t \in T$$

补例2：设 $Z_t=\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)},t\in \mathrm{R}$

其中ω_0为正常数，n为固定正整数.

$X_1,\cdots,X_n,\Phi_1,\cdots,\Phi_n$是相互独立的实随机变量，且

$\mathrm{E}[X_k]=0,\ \mathrm{D}[X_k]=\sigma_k^2,\ \Phi_k$ □ $\mathrm{U}[0,2\pi]$，$k=1,\cdots,n$

计算随机过程$Z=\{Z_t,t\in \mathrm{R}\}$的均值函数和相关函数.

解 $m_Z(t)=\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}]=0$

$$\mathrm{R}_Z(s,t)=\mathrm{E}[\overline{\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 s+\Phi_k)}}\cdot\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}]$$

$$=\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}X_k X_l e^{-j(\omega_0 s+\Phi_k)}e^{j(\omega_0 t+\Phi_l)}]$$

$$=e^{j\omega_0(t-s)}\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}X_k X_l e^{j(\Phi_l-\Phi_k)}]$$

$$=e^{j\omega_0(t-s)}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$$

练习 设S.P. $X_t=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ $t\geq 0$, ω为常数. A,B相互独立,同服从正态分布$N(0,\sigma^2)$ 求该过程的数字特征.

解 $$m_X(t)=\mathrm{E}[X_t]=0 \qquad -\infty<t<+\infty$$

$$R_X(s,t)=\mathrm{E}[X_s X_t]$$

$$=\mathrm{E}[A^2]\cos\omega s\cos\omega t$$

$$+\mathrm{E}[AB](\sin\omega s\cos\omega t+\cos\omega s\sin\omega t)$$

$$+\mathrm{E}[B^2]\sin\omega s\sin\omega t$$

$$=\sigma^2\cos\omega(t-s) \quad -\infty<s,t<+\infty$$