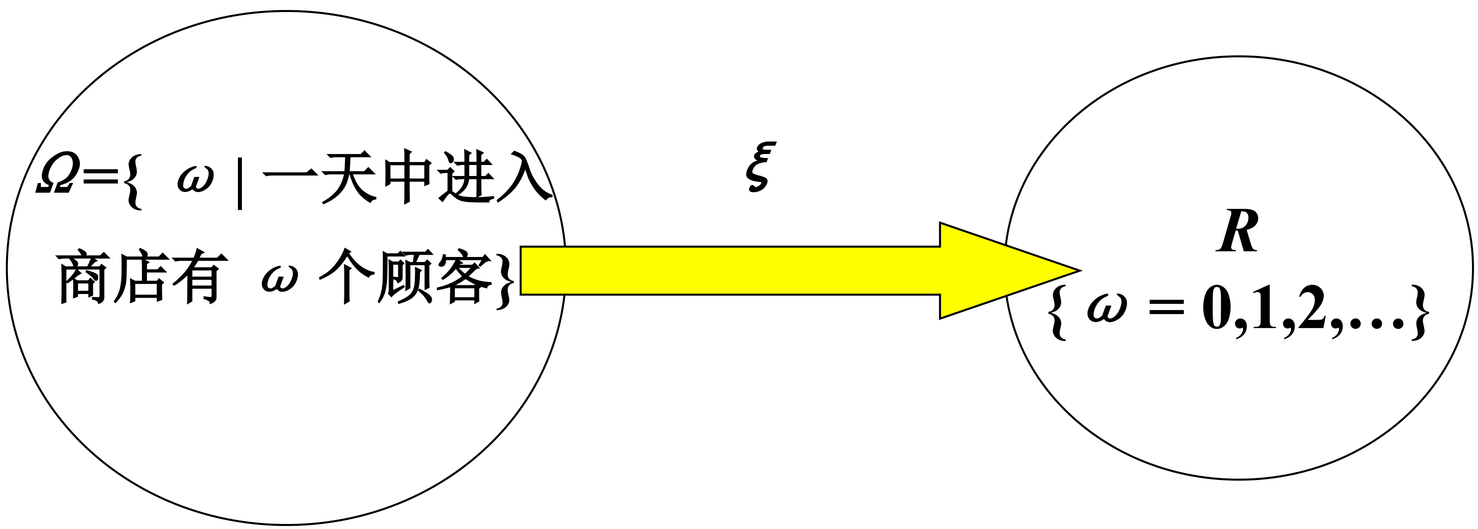
第二章 离散型随机变量

§ 2.1 一维随机变量及分布列

一、随机变量

例1. 观察一天中进入某商店的顾客人数。



例2. 袋中有 3 只黑球，2 只白球，从中任意取出 3 只球，观察取出的 3 只球中的黑球的个数。我们将 3 只黑球分别记作 1，2，3 号，2 只白球分别记作 4，5 号，则该试验的样本空间为

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{lll} (1, \quad 2, \quad 3) & (1, \quad 2, \quad 4) & (1, \quad 2, \quad 5) \\ (1, \quad 3, \quad 4) & (1, \quad 3, \quad 5) & (1, \quad 4, \quad 5) \\ (2, \quad 3, \quad 4) & (2, \quad 3, \quad 5) & (2, \quad 4, \quad 5) \\ (3, \quad 4, \quad 5) & & \end{array} \right\}$$

我们记取出的黑球数为 ξ，则 ξ 的可能取值为 1，2，3. 因此， ξ 是一个变量。但是， ξ 取什么值依赖于试验结果，即 ξ 的取值带有随机性，所以，我们称 ξ 为随机变量。 ξ 的取值情况可由下表给出：

样本点	黑球数 ξ	样本点	黑球数 ξ
$(1,\ 2,\ 3)$	3	$(1,\ 4,\ 5)$	1
$(1,\ 2,\ 4)$	2	$(2,\ 3,\ 4)$	2
$(1,\ 2,\ 5)$	2	$(2,\ 3,\ 5)$	2
$(1,\ 3,\ 4)$	2	$(2,\ 4,\ 5)$	1
$(1,\ 3,\ 5)$	2	$(3,\ 4,\ 5)$	1

由上表可以看出，该随机试验的每一个结果都对应着变量 ξ 的一个确定的取值，因此变量 ξ 是样本空间 Ω 上的函数：

$$\xi=\xi(\omega) \qquad (\omega\in\Omega)$$

我们定义了随机变量后，就可以用随机变量的取值情况来刻划随机事件。例如

$$\{\omega \mid \xi(\omega)=2\}=\{\xi=2\}$$

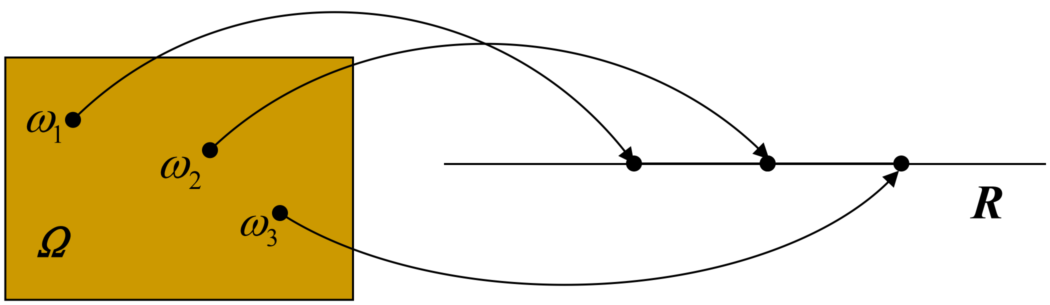
表示取出**2**个黑球这一事件；

$$\{\xi\geq 2\}$$

表示至少取出**2**个黑球这一事件，等等。

随机变量的定义：

设 (Ω, F, P) 是一个概率空间，对于 $\omega \in \Omega$，$\xi(\omega)$是一个取实值的单值函数, 则称 $\xi(\omega)$为随机变量。



说 明： (1) 随机变量常用大写的英文字母

$$X、Y、Z、\cdots$$

或希腊字母

$$\xi、\eta、\varsigma、\cdots$$

等来表示。而以英文小写字母

$$x、y、z、w、\cdots$$

表示实数。

(2) 对于随机变量，我们常常关心的是它的取值。

(3) 我们设立随机变量，是要用随机变量的取值来描述随机事件。

引入随机变量的目的：用随机变量的取值表示随机事件。

一般地，若 L 是一个实数集合，将 ξ 在 L 上的取值写成 $\{\xi\in L\}$，用其表示事件 $B=\{\omega\mid\xi(\omega)\in L\}$，即 B 是由 Ω 中使得 $\xi(\omega)\in L$ 的所有样本点所组成的事件，此时有

$$P\{\xi\in L\}=P(B)=P\{\omega\mid\xi(\omega)\in L\}.$$

随机变量的特点:

①**具有随机性:** 在一次试验之前不知道它取哪一个值，但事先知道它全部可能的取值。

②**随机变量的取值具有一定的概率。**

例3. 掷一颗骰子，令：

ξ：出现的点数。

则 ξ 就是一个随机变量。它的取值为 1，2，3，4，5，6.

$$\{\xi \le 4\}$$

表示掷出的点数不超过 4 这一随机事件；

$$\{\xi\text{取偶数}\}$$

表示掷出的点数为偶数这一随机事件。

例4. 一批产品有 50 件，其中有 8 件次品，42 件正品。现从中取出 6 件，令：

X：取出 6 件产品中的次品数。

则 X 就是一个随机变量。它的取值为 0，1，2，…，6.

$$\{X=0\}$$

表示取出的产品全是正品这一随机事件；

$$\{X\geq 1\}$$

表示取出的产品至少有一件次品这一随机事件。

例5. 上午 8:00～9:00 在某路口观察，令：

Y：该时间间隔内通过的汽车数。

则 *Y* 就是一个随机变量。它的取值为 0，1，….

$$\{Y < 100\}$$

表示通过的汽车数小于100辆这一随机事件；

$$\{50 < Y \le 100\}$$

表示通过的汽车数大于 50 辆但不超过 100 辆这一随机事件。

注意： *Y* 的取值是<u>可列无穷</u>个！

例6. 观察某生物的寿命（单位：小时），令：

Z：该生物的寿命。

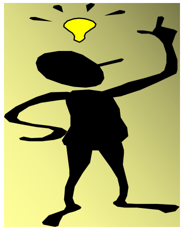
则 Z 就是一个随机变量．它的取值为所有非负实数。

$$\{Z \le 1500\}$$

表示该生物的寿命不超过**1500**小时这一随机事件。

$$\{Z > 3000\}$$

表示该生物的寿命大于 **3000**小时这一随机事件。



注意：Z 的取值是不可列无穷个！

例7. 掷一枚硬币，令：

$$\eta=\begin{cases}1 & \text{掷硬币出现正面,}\\ 0 & \text{掷硬币出现反面,}\end{cases}$$

则 η 是一个随机变量。

例8. 掷一枚骰子，在例3中，我们定义了随机变量 ξ 表示出现的点数。我们还可以定义其它的随机变量，例如我们可以定义：

$$\eta=\begin{cases}1 & \text{出现偶数点，}\\ 0 & \text{出现奇数点。}\end{cases}$$

$$\zeta=\begin{cases}1 & \text{点数为 }6\text{，}\\ 0 & \text{点数不为 }6\text{。}\end{cases}$$

说 明：在同一个样本空间上可以定义不同的随机变量。

随机变量的分类

随机变量
- 离散型

  有限个或可列个可能值
- 非离散型
  - 连续型

    全部可能取值不仅无穷多，而且还不能一一列举，而是充满一个区间。
  - 其他

二 离散型随机变量与分布列

定义1：如果随机变量 ξ 的取值是有限个或可列无穷个，则称 ξ 为**离散型随机变量**。

定义2.1 定义在样本空间 Ω 上，取值于实数域 R，且只取有限个或可列个值的变量 $\xi=\xi(\omega)$ 称作一维（实值）离散型随机变量，简称为离散型随机变量。

显然，要掌握一个离散型随机变量 ξ 的统计规律性，必须且只需知道 ξ 的所有可能取值以及每个可能值的概率。

定义2：设离散型随机变量ξ的所有可能取值为

$$x_1,\quad x_2,\quad \cdots,\quad x_n,\quad \cdots$$

并设

$$P\{\xi = x_n\} = p_n,\qquad (n = 1,\quad 2,\quad \cdots).$$

则称上式或

ξ	x_1	x_2	$\cdots,$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots,$	p_n	$\cdots$

为离散型随机变量 ξ 的分布列（或概率函数、或分布）。

说　明：离散型随机变量可完全由其分布列来刻划，即离散型随机变量可完全由其的可能取值以及取这些值的概率唯一确定。

离散型随机变量分布列的性质:

(1). 对任意的自然数n，有　$p_n \geq 0$;

(2). $\sum_n p_n = 1$.

(3). 必存在一个n_0，使得　$p_{n_0} = \max_n (p_n)$;

由于$p\{\xi = x_{n_0}\} = p_{n_0}$，我们称$x_{n_0}$为随机变量$\xi$的最大可能值。

例1 从 1～10 这 10 个数字中随机取出 5 个数字，令：

X：取出的 5 个数字中的最大值。

试求 X 的分布列。

解： X 的取值为 5，6，7，8，9，10．并且

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^{4}}{C_{10}^{5}} \qquad (k=5,\quad 6,\quad \cdots,\quad 10)$$

具体写出，即可得 X 的分布列：

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

例2 将 1 枚硬币掷 3 次，令：

X：出现的正面次数与反面次数之差。

试求 X 的分布列。

解： X 的取值为 -3，-1，1，3． 并且

X	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

例3 设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

则

$$P\{X \le 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

$$P\{X > 3\} = P\{X = 4\} + P\{X = 5\} = \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{7}{16}.$$

$$P\{0.5 \le X < 3\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

例4 设随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$ 试求常数c.

解：由随机变量的性质，得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

该级数为等比级数，故有

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=c\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}.$$

所以 $c=3$.

四、一些重要的离散型随机变量

1) 退化分布或单点分布： 如果随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=c\}=1$$

X	c
P	1

单点分布的概率背景：随机变量 X 以概率 1 取值 c。

2) 两点分布： 如果随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=0\}=1-p，\quad P\{X=1\}=p$$

X	0	1
P	$1-p$	p

记作 $X \sim b(1, p)$ （其中 $0 \le p \le 1$ 为参数）

两点分布也称作 **0-1分布**或**Bernoulli分布**。

两点分布的概率背景

进行一次 Bernoulli试验，设：

$$P(A)=p\,,\qquad P(\overline{A})=1-p=q.$$

令 X：在这次 Bernoulli试验中事件 A 发生的次数。或者说令

$$X=\begin{cases}1 & \text{若事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{若事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

则 $X\sim b(1,\ p)$.

例5 **15** 件产品中有 **4** 件次品，**11** 件正品。从中取出 **1** 件，

令 X：取出的一件产品中的次品数。

则 X 的取值为 **0** 或者 **1**，并且

$$P\{X=0\}=\frac{11}{15},\quad P\{X=1\}=\frac{4}{15}.$$

即：$$X \sim b\left(1,\ \frac{4}{15}\right).$$

3）**二 项 分 布：** **如果随机变量 X 的分布列为**

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

则称随机变量X服从参数为n,p的二项分布，记作

$X\sim b(n,p)$　　（其中n为自然数，$0\le p\le 1$为参数）

又记：$b(k;n,p)=P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n)$。

显然，当 n=1 时

$$X\sim b(1,\ p)$$

此时，X服从两点分布。

这说明，两点分布是二项分布的一个特例。

二项分布的概率背景

进行 n 重 Bernoulli试验，设在每次试验中

$$P(A)=p,\qquad P(\overline{A})=1-p=q.$$

令 X：在这次Bernoulli试验中事件 A 发生的次数。于是

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

则 $X\sim b(n,\ p)$.

例6 一张考卷上有5道选择题，每道题列出4个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测至少能答对4道题的概率是多少？

解：每答一道题相当于做一次Bernoulli试验，设

$$A=\{答对一道题\}, \text{ 则 } \quad P(A)=\tfrac{1}{4}.$$

则答5道题相当于做5重Bernoulli试验。

设：X：该学生靠猜测能答对的题数， 则 $X \sim b(5,\frac{1}{4})$.

所以，$P\{至少能答对4道题\}=P\{X\geq 4\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}$

$$=C_5^4\left(\tfrac{1}{4}\right)^4\cdot\tfrac{3}{4}+\left(\tfrac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{64}.$$

二项分布的分布形态

若 $X \sim b(n,\ p)$，则

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}，\text{其中}\quad (q=1-p).$$

由此可知，二项分布的分布：

先是随着 k 的增大而增大，达到其最大值后再随着 k 的增大而减少．这个使得

$$P\{X=k\}$$

达到其最大值的 m 称为该二项分布的最可能出现次数。

如果 $(n+1)p$ 不是整数，则 $m=[(n+1)p]$；

如果 $(n+1)p$ 是整数，则 $m=(n+1)p$ 或 $(n+1)p-1$.

例7 对同一目标进行400次独立射击，设每次射击时的命中率均为0.02，试求400次射击最可能命中几次？其相应的概率是多少？

解：对目标进行400 次射击相当于做400重Bernoulli试验。

令：

X：400射击中命中目标的次数.

则由题意

$$X \sim b(400,\ 0.02).$$

由于 $(400+1)\times 0.02 = 8.02$，它不是整数,所以最有可能命中次数为$m=[8.02]=8$.其概率为

$$P\{X=8\} = C_{400}^{8} \times 0.02^{8} \times 0.98^{392}.$$

4）Poisson 分布

如果随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2,\cdots) \text{ ，} \quad (\text{其中}\lambda>0\text{为常数}).$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的 **Poisson 分布**。并记作

$X\sim P(\lambda)$, 又记：$P(k;\lambda)=\dfrac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,\cdots)$。

分布列性质的验证

（1）由于 $\lambda > 0$，可知对任意的自然数 k，有

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} > 0.$$

（2）又由幂级数的展开式，可知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\,e^{\lambda} = 1.$$

所以

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

满足分布列性质。

Poisson分布的应用

Poisson分布是概率论中重要的分布之一。自然界及工程技术中的许多随机指标都服从Poisson分布。

例如，可以证明，电话总机在某一时间间隔内收到的呼叫次数，放射物在某一时间间隔内发射的粒子数，容器在某一时间间隔内产生的细菌数，某一时间间隔内来到某服务台要求服务的人数，等等，在一定条件下，都是服从Poisson分布的。

例8 设随机变量 X 服从参数为 λ 的**Poisson**分布，且已知

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}.$$

试求 $P\{X=4\}$.

解：随机变量 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

由已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$,得 $\frac{\lambda^{1}}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{2}}{2!}e^{-\lambda}$,

由此解得 λ =**2.** 从而

$$P\{X=4\}=\frac{2^{4}}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}=0.09022.$$

例9 设一个人在一年内的感冒次数服从参数$\lambda=5$的$Poisson$分布，现有一种预防感冒的药，它对30%的人来讲，可将上述参数λ降为$\lambda=1$（疗效显著）；对另45%的人来讲，可将参数λ降为$\lambda=4$（疗效一般）；而对其余25%的人来讲，则是无效的．现某人服用此药一年，在这一年中，他得了3次感冒，试求此药对他“疗效显著”的概率。

解：设 B={ 此人在一年中得3次感冒 },

$A_1=\{$该药疗效显著$\}$, $A_2=\{$该药疗效一般$\}$, $A_3=\{$该药无效$\}$,

则由Bayes公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{0.30\times\frac{1^3}{3!}e^{-1}}{0.30\times\frac{1^3}{3!}e^{-1}+0.45\times\frac{4^3}{3!}e^{-4}+0.25\times\frac{5^3}{3!}e^{-5}}$$

$$=0.1301.$$

Poisson定理

设有一串正数p_n，且$0 \le p_n \le 1, (n=1,2,\cdots)$。若$\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda \ge 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} b(k;n,p_n) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(k;\lambda).$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n, \cdots)$$

证明： 令$np_n = \lambda_n$，则有

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.$$

对于固定的 k，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{-\frac{n-k}{n}\cdot\lambda_n}=e^{-\lambda}.$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k\left(1-p_n\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Poisson定理的推论

若$np_n = \lambda \geq 0 (n = 1, 2, \cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty} b(k; n, p) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k \left(1 - p_n\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(k; \lambda).$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n, \cdots)$$

Poisson定理及其推论的说明：

若np_n恒等于常数λ，或者p_n足够小，n足够大，则一般来说

$$b(k; n, p_n) \approx P(k; \lambda_n)，其中\lambda_n = np_n (k = 0,1, \cdots, n).$$

常常被应用于n重贝努利试验（n很大）中稀有事件（p很小）概率的研究。

在一群母鸡中，每只母鸡在[0,t]内的产蛋量是随机变量，可以用泊松分布来描述。

把[0,t]n等分，随着n的增大，△t=t/n趋于0,于是在△t时间间隔内，母鸡或下一个蛋，或一个也不下，故构成n重Bernoulli概型，利用泊松定理，在[0,t]内的产蛋量服从泊松分布.

例10 设每次射击命中目标的概率为0.01，现射击200次，求至少命中3次目标的概率（用Poisson分布近似计算）。

解：设 B={ 200次射击至少命中3次目标 }，进行200次射击可看作是一200重Bernoulli试验。令

$$X\text{：200次射击命中目标的次数.}$$

则 $X \sim b(200, 0.01)$.

用 $Poisson$ 分布近似计算，取 $\lambda = 200 \times 0.01 = 2$.

所以， $P(B) = P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$

$$= 1 - e^{-2} - 2e^{-2} - \frac{2^2}{2}e^{-2} = 0.3233.$$

例11：某电话局在长度为t的时间间隔内收到的呼救次数X服从参数为0.5的泊松分布，而与时间间隔的起点无关，求某天中午12点到下午3点没有呼救的概率？12点到下午5点，至少收到一次呼救的概率？

例12：合理配备维修工人问题

设有80台同类型设备，工作相互独立，故障概率为0.01且一台设备故障由1人处理，考虑两种配备方案（1）由4人维护，每人负责20台，（2）由3人共同维护80台，试比较二种方案在发生故障时不能及时维护的概率大小？