§2.6　条件分布与条件数学期望

一、离散型随机变量的条件分布

二、离散型随机变量的条件期望

三、小结

设 (ξ,η) 是一个二维离散型随机变量，他们一切可能取的值为 $(a_i,b_j),i,j=1,2,\cdots$ ，令

$$p_{ij}=P(\xi=a_i,\eta=b_j)\,,i,j=1,2,\cdots$$

$$P(\xi=a_i,\eta=b_j)=P(\xi=a_i\,|\,\eta=b_j)P(\eta=b_j)$$

$P(\xi=a_i\,|\,\eta=b_j)$ 记作 $p_{i|j}$ ，称为条件分布列。

定义2.7 若随机变量 ξ 在"$\eta=b_j$"条件下的条件分布列为 $p_{i|j}$，又

$$\sum_{i=1}^{+\infty}|a_i|\,p_{i|j}<+\infty,$$

则称 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_i p_{i|j}$ 为 ξ 在"$\eta=b_j$" 条件下的数学期望，简称为条件期望，并记作 $E\{\xi\mid\eta=b_j\}$.

例2.20 某射手进行射击，每次射击击中目标的概率为 $p(0<p<1)$ 射击进行到击中目标两次时停止。令 ξ 表示第一次击中目标时的射击次数，η 表示第二次击中目标时的射击次数，试求联合分布列 p_{ij}，条件分布列 $p_{i|j}, p_{j|i}$ 及条件期望 $E\{\xi \mid \eta = n\}$.

例2 某射手进行射击，每次设计击中目标的概率为p(0<p<1),射击进行到击中目标两次时为止。令ξ表示第一次击中目标时的次数，η表示第二次击中目标时的次数，试求联合分布列p_{ij}条件分布列$p_{i/j}, p_{j/i}$ 及数学期望 $E\{\xi/\eta=b_j\}$

解 由题意易知 $p_{ij}=P(\xi=i,\eta=j)$

$$=p^2q^{j-2}, 1\le i<j=2,3,\ldots$$

边际分布列:

$$p_{i\cdot}=\sum_{j=i+1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{j=i+1}^{\infty}p^2q^{-2}$$

$$=\frac{p^2q^{i-1}}{1-q}=pq^{i-1},i=1,2,\ldots$$

$$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{j-1}p_{ij}=\sum_{i=1}^{j-1}p^2q^{j-2}$$

$$=(j-1)p^2q^{j-2},\ j=2,3,\ldots$$

条件分布列为$p_{i/\mathrm{j}}=p_{ij}\big/p_{\cdot j}=p^2q^{j-2}\big/[(j-1)p^2q^{j-2}]$

$$=1\big/j-1.1\leq i<j=2,3,\ldots$$

$$p_{j/i}=p_{ij}\big/p_{i\cdot}=p^2q^{j-2}\big/(pq^{j-1})=pq^{j-i-1}.j>i,i=1,2,3,\ldots$$

此时$\mathrm{E}\{\xi/\eta=\mathrm{n}\}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{i}\,\mathrm{p}_{\mathrm{i}/\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{i}\frac{1}{\mathrm{n}-1}=\frac{n}{2}$

条件数学期望的性质

1. 若$a \le \xi \le b$,则$E\{\xi / \eta=\mathrm{b}_j\}$存在，且$a \le E\{\xi / \eta=\mathrm{b}_j\} \le b$.

特别C是一个常数，则$E(C / \eta = b_j) = C$.

2.对任意实数k_1,k_2, 又$E\{\xi_1 / \eta = b_j\}$，$\mathrm{E}\{\xi_2 / \eta=\mathrm{b}_\mathrm{j}\}$存在，

则$E\{(\mathrm{k}_1\xi_1+\mathrm{k}_2\xi_2) / \eta = b_j\} = k_1 E\{\xi_1 / \eta = b_j\} + \mathrm{k}_2\mathrm{E}\{\xi_2 / \eta=\mathrm{b}_\mathrm{j}\}$

可推：$E(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(\xi_i)$.

3. $\mathrm{E}(\mathrm{E}\{\xi/\eta\}) = E\xi$

证明 $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\{\xi/\eta = b_j\} P(\eta = b_j)$

而 $E\{\xi/\eta = b_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p_{i/j} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \frac{\mathrm{p}_{ij}}{p_{\cdot j}}$

$$\mathrm{E}(E\{\xi/\eta\}) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p_{i\cdot} = E\xi$$

三小结

条件数学期望

概念 $E\{\xi/\eta=b_j\}$

性质

$$E(C/\eta=b_j)=C.$$

$$E\{(\mathrm{k}_1\xi_1+\mathrm{k}_2\xi_2)/\eta=b_j\}$$

$$=k_1E\{\xi_1/\eta=b_j\}+\mathrm{k}_2\mathrm{E}\{\xi_2/\eta=\mathrm{b}_\mathrm{j}\}$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}\{\xi/\eta\})=E\xi$$