第三章 连续型随机变量

一、复习

定义1.设 X 是一个 $r.v$，称

$$\boxed{F(x)=P(X\le x)} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

为 X 的分布函数. $F(x)$ 也可记为 $F_X(x)$.

如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X落在区间

$\boxed{(-\infty,x]}$ 的概率.

1、分布函数的性质

1\. 若$a<b$,则$F(a)\le F(b)$

2\. $0\le F(x)\le 1,(-\infty<x<+\infty)$,且

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(-\infty)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=F(+\infty)=1$$

3\. $F(x+0)=F(x)$

2、离散型随机变量的概率分布

定义2： 设$x_k(k=1,2,\ldots)$是离散型随机变量X所取的一切可能值，p_k是X取值x_k的概率，称

$$P(X=x_k)=p_k,\ k=1,2,\ldots\ \ldots$$

为离散型随机变量X的概率函数或分布律，也称概率分布.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$
P_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$

其中 $\boldsymbol{p_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ 满足：

（1）$\boldsymbol{p_k} \geq 0, \qquad k=1,2,\ldots$

（2）$\sum_{k}^{\infty} p_k = 1$

例1

X	-2	-1	0	1	2
P_k	a	$3a$	$\frac{1}{8}$	a	$2a$

(1)求常数a；

(2) $P(X<1),\ P(-2<X\leq 0),\ P(X\geq 2)$

3、离散型随机变量的分布函数特点

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_k\leq x}p_k$$

1. 它的图形是一条右连续的阶梯型曲线

2. 在随机变量的每一个可能取值点 $x=x_k(k=1,2,\ldots)$,该图形都有一个跳跃，跳跃值为p_k

引例：靶子是半径为2的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，并设都能中靶。用X表示弹着点到圆心的距离，求随机变量X的分布函数.

§ 3.2 连续型随机变量

对于随机变量 X,如果存在非负函数$f(x)$，使得对任意的实数x,都有

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称 X为连续型$r.v$,称 $f(x)$为 X 的概率密度函数，简称为概率密度或分布密度。

概率密度函数$p(x)$满足：

1.$p(x)\ge 0$; (非负性） 2.$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$（规范性）

3.$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx$

注：1.连续型随机变量的分布函数是连续的（由高数，连续函数的变上限积分仍是连续函数）

2.对于连续型随机变量（$c.r.v.$）$P(\xi = x_0) = 0$

$$P(\xi = x_0) = P(\xi \le x_0) - P(\xi < x_0) = F(x_0) - F(x_0) = 0$$

3.若$p(x)$是$c.r.v.$的概率密度，则任意改变$p(x)$的有限个点的函数值，仍是ξ的密度函数.

4.$P(x_1 < \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi \le x_2) = P(x_1 \le \xi < x_2)$

5.分布函数与概率密度函数之间的关系：

在$p(x)$的连续点处，有$F'(x) = p(x)$

例2：设$c.\,r.v.: p(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求$X$的分布函数.

二、几种常见的分布函数

1	均匀分布
2	指数分布

1、均匀分布

设a,b为有限数，且$a<b$.若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & x<a\text{或}x>b\end{cases}$$

则称X在区间$[a,b]$上服从均匀分布，简记为$X\sim U[a.,b]$.

2、指数分布

若随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$\lambda>0$

则称X服从以 λ 为参数的指数分布,
简记为 $X\sim E(\lambda)$.

指数分布常用于可靠性统计研究中,
如元件的寿命.

例4：某电子元件的使用寿命X是一个连续型随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} Ce^{-\frac{x}{100}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

(1) 确定常数C;

(2)寿命超过100小时的概率；

(3)已知该元件已正常使用200小时，求它至少还能正常使用100小时的概率。

指数分布的无记忆特性

若随机变量X，对任意的S>0,T>0满足

$$P(X>S+T|\ X>S) = P(X>T)$$

则称X的分布具有无记忆性.

正态分布

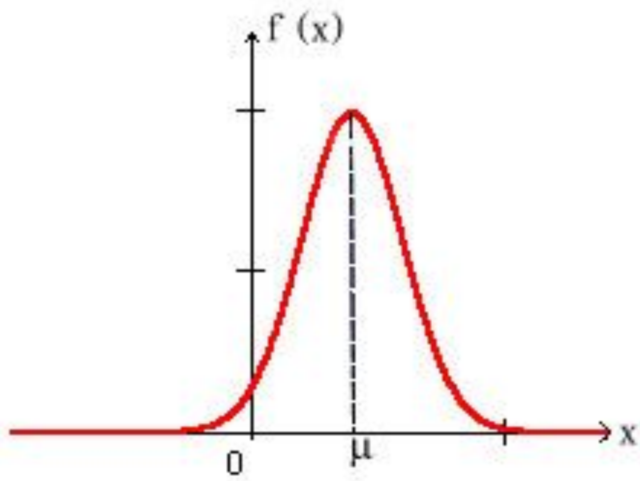
若r.v X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}，\quad -\infty<x<\infty$$

其中 μ 和 σ^2 都是常数, μ 任意，$\sigma>0$,
则称X服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布.

记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

◆正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$的图形特点

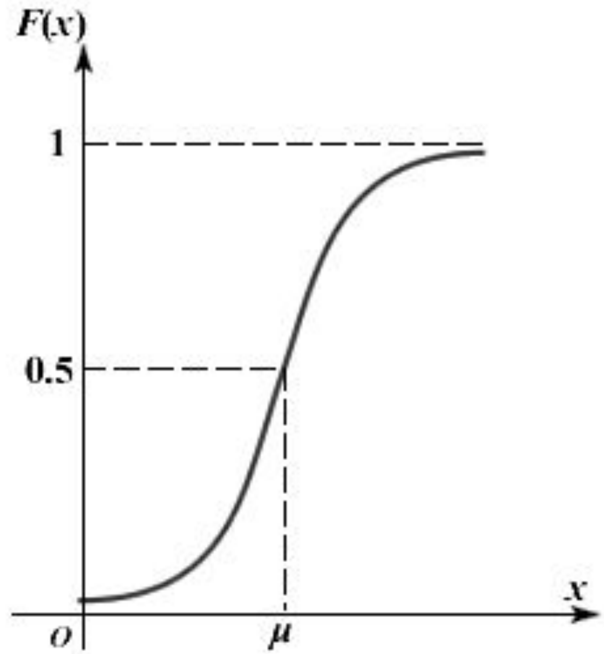


正态分布的密度曲线是一条关于 μ 对称的钟形曲线.

特点是“两头小，中间大，左右对称”.

设X~$N(\mu,\sigma^2)$， X的分布函数是

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,\quad -\infty<x<\infty$$

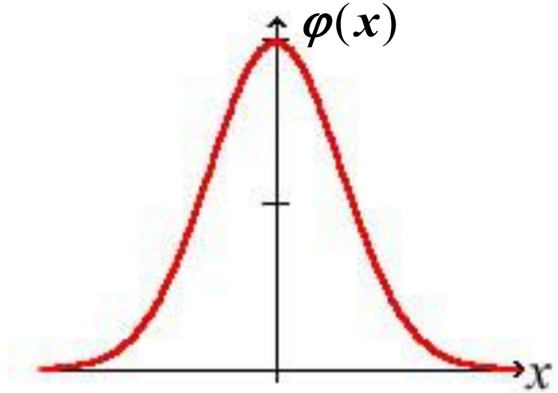


◆标准正态分布

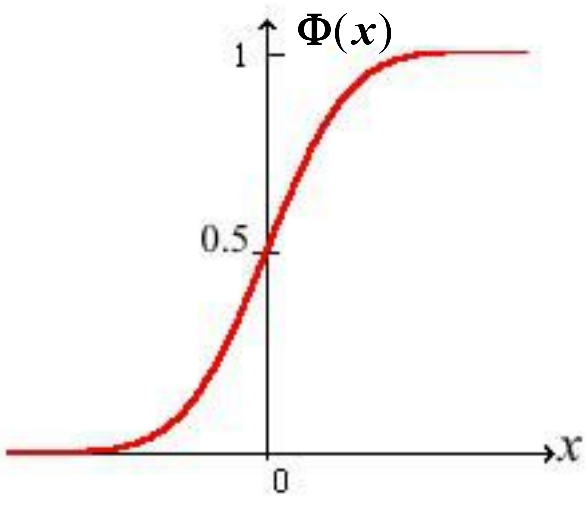
$\mu = 0, \sigma = 1$ 的正态分布称为标准正态分布.

其密度函数和分布函数常用φ(x)和Φ(x)表示:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

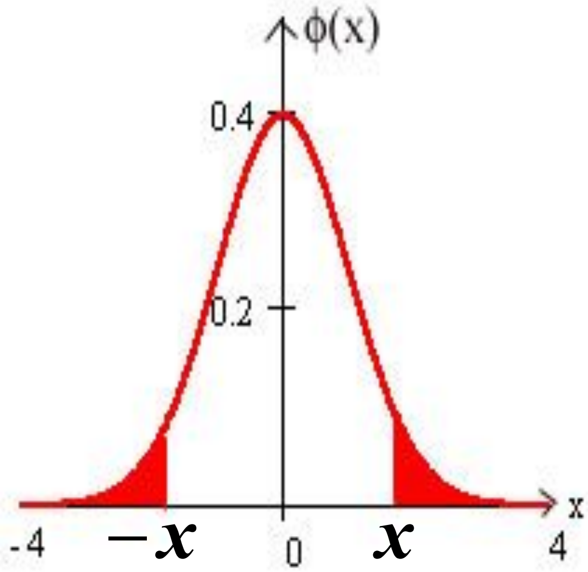


◆正态分布与标准正态分布的关系

标准正态分布的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

◆正态分布的概率计算



$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

X>0时，查表计算；

1.若 $X \sim N(0,1)$

$$P(X \le x) = \begin{cases} \Phi(x) & x > 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1 - \Phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

若$x > 0$,则$P(|X| < x) = 2\Phi(x) - 1$

2.若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$P(a < X < b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

例6

设$X \sim N(8, 0.5^2)$,求$P(X \le 10)$,

$P(5 < X < 9)$,$P(|X - 8| < 1)$

例7 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,求$P(|X - \mu| \le k\sigma)$,

例8 公共汽车车门的高度是按男子与车门顶头碰头机会在0.01以下来设计的.设男子身高$X \sim N(170,36)$,问车门高度应如何确定?

■分位点

设$X \sim N(0,1)$, 对于给定的 $0 < \alpha < 1$, 可以找出

满足 $$P(X > \mu_\alpha) = \int_{\mu_\alpha}^{+\infty} \varphi(x)dx = \alpha$$

的μ_α值，并称之为 X关于 α的上侧分位点。

设$X \sim N(0,1)$, 对于给定的$0 < \alpha < 1$, 可以找出满足

$$P(|X| > \mu_{\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-\mu_{\frac{\alpha}{2}}}^{\mu_{\frac{\alpha}{2}}} \varphi(x)dx = \alpha$$

的$\mu_{\frac{\alpha}{2}}$值，并称之为X关于α的双侧分位点。