§ 1.3 古典概型

一、古典概型

若某实验E满足：

1.有限性：样本空间S＝$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$;

2.等可能性：$P(e_1)=P(e_2)=\ldots=P(e_n)$.

则称E为古典概型也叫等可能概型。

二、古典概型中的概率

设事件A中所含样本点个数为k，以n记样本空间S中样本点总数，则有

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

P(A)具有如下性质：

(1) $0\leq P(A)\leq 1$；

(2) $P(\Omega)=1$； $P(\phi)=0$

(3) $AB=\phi$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

例1:有三个子女的家庭, 设每个孩子是男是女的概率相等, 则至少有一个男孩的概率是多少?

例1.6： 在盒子中有十个相同的球，分别标为号码1、2、…、10，从中任取一球，求此球的号码为偶数的概率。

三、古典概型的几类基本问题

复习：排列与组合的基本概念

乘法公式：设完成一件事需分两步，第一步有n_1种方法, 第二步有n_2种方法，则完成这件事共有n_1n_2种方法。

加法公式：设完成一件事可有两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。

组合：从含有n个元素的集合中随机抽取k 个，

共有

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

种取法.

1、抽球问题(抽样问题）

例1:设盒中有3个白球，2个红球，现从盒中任抽2个球，求取到一红一白的概率。

答:取到一红一白的概率为3/5

一般地，设盒中有*N*个球，其中有*M*个白球，现从中任抽*n*个球，则这*n*个球中恰有*k*个白球的概率是

$$p = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

2、分球入盒问题(分房问题、占位问题)

例2：将3个球随机的放入3个盒子中去，问：

（1）每盒恰有一球的概率是多少？

（2）空一盒的概率是多少？

一般地，把r个球随机地分配到n个盒子中去（$r\leq n$），则

A={指定的r个盒子恰好含有1个球}；$p = \dfrac{P_m^n}{m^n}$

B={每盒至多有一球}；　C={某指定的盒子恰好有m个球}

引申生日问题

求任意r人生日各不相同的概率

配对问题

从n双不同德 鞋子中任取$2r$只，求下列事件的概率

A={没有成对的鞋子}

B={只有1对鞋子}

C={有r对鞋子}

3.分组问题

例3：30名学生中有3名运动员，将这30名学生平均分成3组，求：

（1）每组有一名运动员的概率；

（2）3名运动员集中在一个组的概率。

一般地，把n个球随机地分成m组($n>m$),要求第 i 组恰有n_i个球($i=1,\ldots m$)，共有分法：

$$\frac{n!}{n_1!\ldots\ n_m!}$$

4 随机取数问题

例4:从1到200这200个自然数中任取一个,

(1)求取到的数能被6整除的概率;

(2)求取到的数能被8整除的概率;

(3)求取到的数既能被6整除也能被8整除的概率。

四、几何概率

1、几个例子

例1：某人午觉醒来，发觉表停了，他打开收音机，想听电台报时，求他等待时间短于10分钟的概率(半点报时)。

例2：如果在一个5万平方公里的海域里有表面积达40平方公里的大陆架储藏着石油，假如在这海域里随意选定一点钻探，问钻到石油的概率是多少？

例3：在40毫升自来水里有一个细菌，今从中随机取出2毫升水样放到显微镜下观察，求发现细菌的概率。

2、定义

若记A={在区域S中随机地任取一点，而该点落在区域g中}，则

$$P(A)=\frac{m(g)}{m(S)}$$

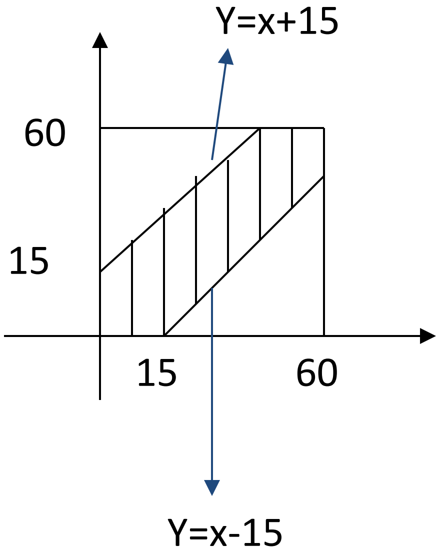
这一类概率称为几何概率。

几何概型推广古典概型中基本事件有限这一假定

例1.11：甲乙两人约定在6时到7时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一人一刻钟，过时即可离去。求两人会面的概率。

解：以x和y分别表示甲乙两人到达约会地点的时间，则两人能够会面的充要条件为

$$|x-y|\le 15$$



在平面上建立直角坐标系如图，

则

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(S)}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}$$

例：蒲丰投针问题，平面上画有等距的平行线，平行线间的距离为a(a>0),向平面任意投掷一枚长为l(l<a)的针，试求针与平行线相交的概率

3、几何概率的基本性质

（1）**0 $\leq$ P(A) $\leq$ 1**；

（2）**P(S)＝1**；**P(ϕ)=0**；

（3）若，A1, A2, …An…两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$ （可列可加性）。

仔细考察投点问题，为了方便，假定Ω是一单位正方形，A是样本空间Ω的一个子集。

$$则 P(A) = S_A$$

很容易验证P具有非负性，规范性和有限可加性

显然，A不能是Ω的任意子集，至少应该是Ω中具有面积的一类子集，由于Ω中不可测集的存在，因而给出了事件域的概念

在几何概型中，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不

相交的小区域，面积是 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 很自然的问题

这些小区域的总面积是多少？安前面的记号，这些小区域的并可记为

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

总面积是小区域的总面积，即 $S_A = \sum_{i=1}^{+\infty} S_{A_i}$

再把面积理解为概率，就有可列可加性

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$