§ 1.6事件的独立性

一、两事件独立

定义1： 设A、B是两事件，$P(A)\neq 0$,若

$$P(B)=P(B|A)$$

则称事件A与B相互独立。

上式等价于：

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

定理：以下四件事等价：

(1)事件A、B相互独立；(2)事件$\overline{A}$、B相互独立；

(3)事件A、$\overline{B}$相互独立；(4)事件$\overline{A}$、$\overline{B}$相互独立。

证明：（1）推出（2）

$$\overline{A}B = B - BA$$

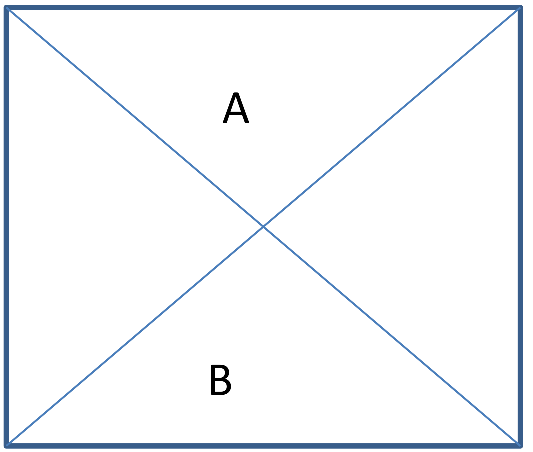
$$P(\overline{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB)$$

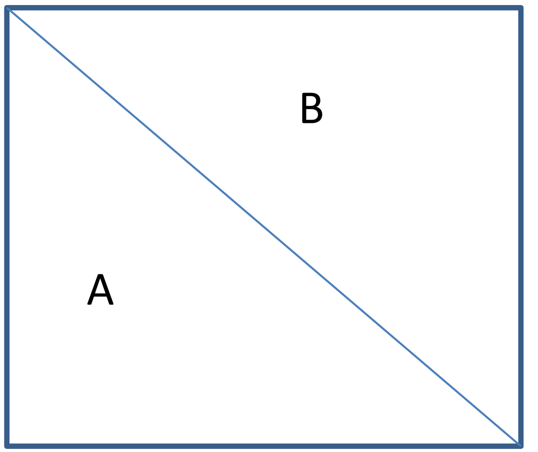
由A与B相互独立，有

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] = P(\overline{A})P(B)$$

即$\overline{\text{A}}$、B相互独立

注：相互独立与互不相容是两个不同的概念，两者之间没有必然联系.





结论： 若P(A)P(B)>0,相互独立与互不能同时成立.

二、三个事件的独立性

定义2、 若三个事件A、B、C满足：

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$, $P(AC)=P(A)P(C)$,

$P(BC)=P(B)P(C)$,

则称事件A、B、C两两相互独立；

若在此基础上还满足：

(2) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,

则称事件A、B、C相互独立。

相互独立与两两独立不同

例：伯恩斯坦反例

三、n个事件相互独立

一般地，设A_1，A_2，…，A_n是n个事件，如果对任意k　(1<k≤n), 任意的$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$，具有等式 $P(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\ldots P(A_{ik})$　　则称n个事件A_1，A_2，…，A_n相互独立。

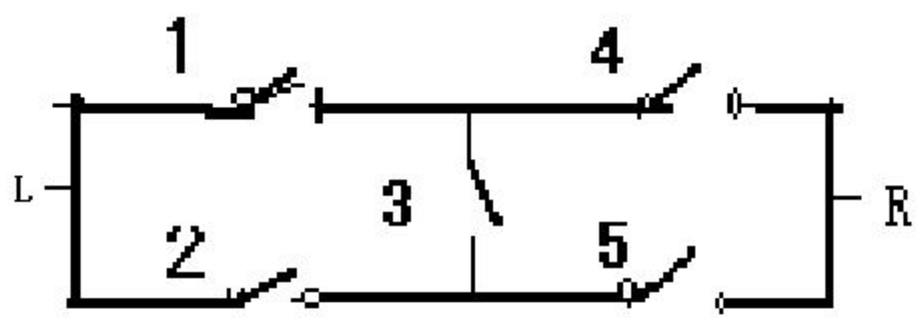
四、事件独立性的应用

1、加法公式的简化：若事件A_1，A_2，…，A_n相互独立，则

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)\ldots P(\overline{A}_n) \quad (1.7.5)$$

2、在可靠性理论上的应用

例1：如图，1、2、3、4、5表示继电器触点,假设每个触点闭合的概率为p,且各继电器接点闭合与否相互独立，求L至R是通路的概率。



例2:一工人照看三台机器，在一小时内甲、乙、丙三个机器需照看的概率分别为0.9、0.8、0.85，求（1）在一小时内没有一台机器需照看的概率；（2）至少有一台机器不需照看的概率。

§1.7贝努里概型

一、贝努里试验

1、定义：如果试验只有两个可能结果： A 及 $\overline{A}$
且 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p=q \quad (0<p<1)$ ， 则称E为贝努里试验。

将贝努里试验独立地重复n次的试验，称为n重贝努里试验。

2、定理：在贝努里试验中，A发生的概率为$p(0<p<1)$，则在n次独立重复试验中，A恰好发生k次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k} \quad k=0,1,\cdots n$$

二、应用

例1.24（P49）：金工车间有10台同类型的机床，每台机床配备的电动机功率为10千瓦，已知每台机床工作时，平均每小时实际开动12分钟，且开动与否是相互独立的。现因当地电力供应紧张，供电部门只提供50千瓦的电力给这10台机床，问这10台机床能够正常工作的概率为多大?

解：设A={10台机床能够正常工作}，Ai={第i台机床开动}，X表示10台机床中正在开动着的机床台数。

则 P(Ai)=12|60=1|5=0.2。

于是，有

$$P(A)=P(X\le 5)=\sum_{k=0}^{5}P(X=k)=\sum_{k=0}^{5}C_{10}^{k}0.2^{k}0.8^{10-k}\approx 0.994$$

例1.25：某大学校乒乓球队与数学系乒乓球队举行对抗赛。校队的实力较系队较强，当一个校队运动员与一个系队运动员比赛时，校队运动员获胜的概率为0.6。现在校、系双方商量对抗赛的方式，提出了三种方案：（1）双方各出3人；（2）双方各出5人；（3）双方各出7人。三种方案中均以比赛中得胜人数多的一方为胜。问：对系队来说，哪一种方案有利？

解：设系队得胜的人数为X，则在上述三种方案中系队得胜的概率为：

$$(1) \quad P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{3} C_3^k 0.4^k 0.6^{3-k} \approx 0.352$$

$$(2) \quad P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} C_5^k 0.4^k 0.6^{5-k} \approx 0.317$$

$$(3) \quad P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{7} C_7^k 0.4^k 0.6^{7-k} \approx 0.290$$

三、练习

1、某电灯泡使用时数在1000以上小时的概率为0.2，求三个灯泡在使用1000小时以后，最多只有一个坏的概率。