主要内容

一、依概率收敛

二、依分布收敛

定理4.5的证明没敲

一、依概率收敛

1、定义

在上一节上，我们从频率的稳定性出发，得出下面的极限关系式：

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - a| \geq \varepsilon) = 0 \qquad \text{其中} \quad \eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

或等价于 $$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - a| < \varepsilon) = 1$$

这与数学分析中通常的函数收敛的意义不同。在上式中以随机变量 η 代替 a 以便得到新的收敛概念。本节假定所得到的随机变量都是定义在同一概率空间（Ω, $\mathscr{F}$, P）上的。

定义4.2

设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\cdots$ 为一列随机变量，η 为一随机变量，如果 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\eta_n-\eta|\geq\varepsilon)=0 \text{或} \lim_{n\to\infty}P(|\eta_n-\eta|<\varepsilon)=1$$

则称随机变量序列$\{\eta_n\}$依概率收敛于η，记作

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n\overset{P}{=}\eta \quad \text{，或} \quad \eta_n\xrightarrow{P}\eta,(n\to\infty)$$

由定义可知，

$$\eta_n\xrightarrow{P}\eta\Leftrightarrow\eta_n-\eta\xrightarrow{P}0,(n\to\infty)$$

随机变量序列 $\{\eta_n\}$ 依概率收敛和数学分析中的序列收敛有很大的不同.

当我们说随机变量序列 $\{\eta_n\}$ 依概率收敛于 η, 是指对 $\forall \varepsilon > 0$, 如下事件

$$\{|\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\}$$

发生的概率，当 n 无限增大时，它无限接近于 0 .

而当我们说序列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 趋于0，是指当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$ 无限接近于 0 .

随机变量序列依概率收敛与函数序列收敛也不一样.

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}P(|\eta_n-\eta|<\varepsilon)=1\Leftrightarrow\eta_n\xrightarrow{P}\eta(n\to\infty$$

有了依概率收敛的概念，随机变量序列$\{\xi_n\}$服从大数定律就可以表达为

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right|<\varepsilon\right)=1$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i(n\to\infty)$$

特别地，

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

伯努利大数定律可以描述为

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

$$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p\qquad(n\to\infty)$$

辛钦大数定律描述为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{P}a\qquad(n\to\infty)$$

例1、设$\{\xi_n\}$是独立同分布的随机变量

根据定义即证

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k-a\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

$$E\xi_1=a,D\xi_1=\sigma^2$$

试证：$\displaystyle\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k\xrightarrow{P}a\qquad(n\to\infty)$

证：$\displaystyle\because E\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k\right]=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kE\xi_k=a\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k=a$

$\forall\varepsilon>0$ ，由切比雪夫不等式

$$P(|\xi-E\xi|\geq\varepsilon)\leq\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$$0\leq P\left(\left|\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k-a\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k\right)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}k^2D\xi_k$$

$$\frac{4}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sigma^2=\frac{2\sigma^2}{3\varepsilon^2}\frac{2n+1}{n(n+1)}\to0(n\to\infty)$$

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k-a\right|\geq\varepsilon\right)=0$

即 $\displaystyle\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k\xrightarrow{P}a(n\to\infty)$

二、依分布收敛

上面我们讨论了随机序列依概率收敛的概念及有关性质，现在我们要问：

如果已知 $\eta_n \xrightarrow{P} \eta(n \to \infty)$， 那么它们相应的分布函数 $F_n(x)$与$F(x)$ 之间有什么关系呢？

是否对 $\forall x \in R$ 都有

$$F_n(x) \to F(x)(n \to \infty)$$ 成立。

这个猜测对不对？

例2、设 $\eta,\{\eta_n\}$ 都是服从退化分布的随机变量，且

$$P(\eta=0)=1$$

$$P\left(\eta_n=-\frac{1}{n}\right)=1, n=1,2,\cdots$$

于是对 $\forall>0$, 当 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 时有

$$P(|\eta_n-\eta|\geq\varepsilon)=P(|\eta_n|\geq\varepsilon)=0$$

所以

$$\eta_n\xrightarrow{P}\eta,(n\to\infty)$$

成立。

又设 $\eta, \{\eta_n\}$ 的分布函数分别为$F(x), F_n(x)$,

则
$$F(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$F_n(x)=\begin{cases}1, & x\geq -\dfrac{1}{n}\\ 0, & x<-\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

显然，当 $x\neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$ 成立。

而当 $x=0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}F_n(0)=\lim_{n\to\infty}0=0\neq 1=F(0)$$

这个简单的例子表明, 一个随机变量序列依概率收敛于某个随机变量,相应的分布函数不一定在每一点上都收敛于这个随机变量的分布函数的.

但是，如果再仔细观察一下这个例子，就可以发现收敛关系不成立的点：x=0，恰好是$F(x)$的不连续点.

在$F(x)$的连续点.

当 $\eta_n \xrightarrow{P} \eta, (n \to \infty)$ 时，它们的分布函数之间就有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \quad \text{成立.}$$

1.定义

定义4.3

设 $F(x), F_1(x), F_2(x), \cdots$ 是一列分布函数，如果对 $F(x)$的每一个连续点x，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ 成立，则称分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数F（x），并记作

$$F_n(x) \xrightarrow{w} F(x), (n \to \infty).$$

若随机变量序列 $\eta_n (n=1,2\cdots)$ 的分布函数 $F_n(x)$ 弱收敛于随机变量 η 的分布函数F（x），也称 η_n 按分布收敛于 η，并记作

$$\eta_n \xrightarrow{L} \eta, (n \to \infty).$$

2. 依概率收敛与弱收敛之间的关系

定理4.若随机变量列$\eta_1, \eta_2, \cdots$ 依概率收敛于随机变量η，即 $\eta_n \xrightarrow{P} \eta(n \to \infty)$ 则相对应的分布函数列 $F_1(x), F_2(x)\cdots$ 弱收敛于分布函数F（x）即

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)(n \to \infty)$$

即 $\boxed{\eta_n \xrightarrow{P} \eta(n \to \infty)} \Rightarrow \boxed{F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)(n \to \infty)}$

证明：略。

注意：这个定理的逆命题不一定成立，即不能从分布函数列的弱收敛肯定相应的随机变量序列依概率收敛，但在特殊情况下，它却是成立的。

例如：抛掷一枚均匀硬币，两个结果$\omega_1=\{正\}$，

$\omega_2=\{反\}$, $\therefore P(\omega_1)=P(\omega_2)=0.5$令$\eta=\begin{cases}1, & \omega=\omega_1\\ -1, & \omega=\omega_2\end{cases}$，

则η是随机变量，其

$$分布函数为F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.5, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

令$\xi(\omega)=-\eta(\omega)$，其分布函数为$F(x)$

令$\eta_n=\eta$,其分布函数为$F_n(x)$,显然$F_n(x)=F(x)$

$\forall x\in R$,有$\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=F(x)$, $\therefore F_n(x)\xrightarrow{W}F(x)$

$\forall 0<\varepsilon<2$,有$P(|\eta_n-\xi|>\varepsilon)=P(2|\eta|>\varepsilon)=1$,

$\therefore \eta_n\xrightarrow{P}\xi$不成立

定理4.6 随机变量序列 $\eta_n \xrightarrow{P} \eta \equiv c$（$c$为常数）

的充要条件为 $F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$

这里 $F(x)$是$\eta \equiv c$ 的分布函数，也就是退化分布

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq c \\ 0, & x < c \end{cases}$$

即

$$\boxed{\eta_n \xrightarrow{P} \eta \equiv c} \Longleftrightarrow \boxed{F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)}$$

证明：必要性由定理4.5立得.

充分性

$\forall \varepsilon > 0,$有

$$\begin{aligned}
P(|\eta_n - \eta| \geq \varepsilon) &= P(|\eta_n - c| \geq \varepsilon) \\
&= P(\eta_n \geq \varepsilon + c) + P(\eta_n \leq c - \varepsilon) \\
&\leq P(\eta_n > c + \varepsilon/2) + P(\eta_n \leq c - \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$= 1 - F_n(\frac{\varepsilon}{2} + c) + F_n(c - \varepsilon) \to 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\therefore \eta_n \xrightarrow{P} \eta$$

3．依概率收敛与按分布收敛间的关系

（1）

$$\eta_n \xrightarrow{P} \eta\ (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad \eta_n \xrightarrow{L} \eta\ (n \to \infty)$$

（2）

$$\eta_n \xrightarrow{P} \eta \equiv c\ (n \to \infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \eta_n \xrightarrow{L} \eta \equiv c\ (n \to \infty)$$

分布函数列的弱收敛是一个很有用的概念，但要判断一个分布函数序列是否弱收敛，有时很麻烦，而判定相应的特征函数序列的收敛性却往往比较容易。

定理4.7 分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数$F(x)$的充要条件是相应的特征函数列 $\{\varphi_n(t)\}$ 收敛于$F(x)$的特征函数 $\varphi(t)$.

例：若$\xi_\lambda \sim \pi(\lambda)$，证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty} P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

证明：$\because \xi_\lambda \sim \pi(\lambda)$，$\therefore \varphi_\lambda(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

故$\eta_\lambda = \dfrac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \dfrac{\xi_\lambda}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}$的特征函数为

$$g_\lambda(t) = \varphi_\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)e^{-i\sqrt{\lambda}t} = e^{\lambda\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)-i\sqrt{\lambda}t}$$

对$\forall t$,有

$$e^{-i\sqrt{\lambda}t} = 1 + \frac{i}{\sqrt{\lambda}}t - \frac{t^2}{2!\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad \lambda \to +\infty$$

于是$\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1)-i\sqrt{\lambda}t=-\frac{t^2}{2}+o(\frac{1}{\lambda})\to-\frac{t^2}{2}$

从而对$\forall\lambda_n\to+\infty$,有$\lim\limits_{\lambda_n\to+\infty}g_{\lambda_n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$

又$e^{-\frac{t^2}{2}}$是$N(0,1)$的特征函数，故

$$\lim_{\lambda\to+\infty}P(\frac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\le x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

例：用特征函数证明泊松定理

即当，$np_n \to \lambda(n \to +\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to+\infty} b(n,k,p_n) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0,1,2\cdots$

证明：设$\{\xi_i^n\}_{1\le i\le n}$是独立同分布二点分布序列，即$P(\xi_i^n = 1) = p_n$

$P(\xi_i^n = 0) = 1 - p_n = q_n, 1 \le i \le n$,则$\xi_i^n$的特征函数为（$q_n + p_n e^{it}$）

记$\eta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^n, \eta_n$的特征函数为$\varphi_n(t)$

则$\varphi_n(t)$=（$q_n + p_n e^{it}$）^{n} 又$np_n \to \lambda(n \to +\infty)$

故$p_n = \dfrac{\lambda}{n} + o(\dfrac{1}{n}), q_n = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + o(\dfrac{1}{n})$

所以$\varphi_n(t)=\left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}e^{it}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

$$=\left(1+\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{\lambda(e^{it}-1)}\lambda(e^{it}-1)}\to e^{\lambda(e^{it}-1)}(n\to+\infty)$$

而$e^{\lambda(e^{it}-1)}$是参数为λ的泊松分布的特征函数

由特征函数的连续性定理得结果成立.

三、以概率收敛的性质

1）、若 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi, \xi_n \xrightarrow{P} \eta,$ 则$P(\xi=\eta)=1$

证： $\because |\xi-\eta| \le |\xi_n-\xi| + |\xi_n-\eta|$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$ ，由 $|\xi-\eta| \ge \varepsilon$ 则 $|\xi_n-\xi| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ 与 $|\xi_n-\eta| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ 中至少有一个成立，即 $\{|\xi-\eta| \ge \varepsilon\} \subset \left\{|\xi_n-\xi| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|\xi_n-\eta| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$

于是 $P(|\xi-\eta| \ge \varepsilon) \le P(|\xi_n-\xi| \ge \frac{\varepsilon}{2}) + P(|\xi_n-\eta| \ge \frac{\varepsilon}{2}) \to 0(n \to \infty)$

即 $\forall \varepsilon > 0$，有$P(|\xi-\eta| < \varepsilon) = 1$，从而$P(\xi=\eta)=1$

这表明，若将两个以概率为1相等的随机变量看作相等时，依概率收敛的极限是唯一的。

2）、设 $\{\xi_n\},\{\eta_n\}$ 是两个随机变量序列， a，b为常数，

若 $\xi_n \xrightarrow{P} a, \eta_n \xrightarrow{P} b$ 且在$g(x,y)$在点（a,b）处连续，

则 $g(\xi_n,\eta_n) \xrightarrow{P} g(a,b),(n\to\infty).$

3）、若 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi, \eta_n \xrightarrow{P} \eta,$

则$\xi_n \pm \eta_n \xrightarrow{P} \xi \pm \eta,(n\to\infty)$

$$\xi_n\eta_n \xrightarrow{P} \xi\eta,(n\to\infty)$$