§3.5 利用导数研究函数(单调性、极值和凸性)

一、与函数的单调性有关的一些结论

定理 3.11(单调的充分必要条件) 若函数 f 在有限闭区间$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可导, 则 f 在$[a,b]$上递增(或递减)当且仅当在(a,b)上成立 $f'\ge 0$(或 $f'\le 0$).

证: "仅当". 假定 f 在$[a,b]$上递增. $\forall x\in(a,b)$, 当$0<h<b-x$时, 有 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\ge 0$, 故 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\ge 0$, 即在$(a,b)$上成立 $f'\ge 0$.

"当". 假定在(a,b)上成立 $f'\ge 0$. $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\ge 0$. 这说明 $f(x_2)\ge f(x_1)$, 即 f 在$[a,b]$上递增. □

定理 3.12(严格单调的充分条件) 若函数 f 在有限闭区间$[a,b]$上连续, 在(a,b)上成立 $f'>0$(或 $f'<0$), 则 f 在$[a,b]$上严格递增(或严格递减). 反之, 结论可能不正确.

证: $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$ >0. 这说明 $f(x_2)>f(x_1)$, 即 f 在$[a,b]$上严格递增. □

定理 3.13(严格单调的充分条件) 若函数 f 在有限闭区间$[a,b]$上连续, 在(a,b)上除去有限个点后成立 $f'>0$(或 $f'<0$), 则 f 在$[a,b]$上严格递增(或严格递减). 反之, 结论可能不正确.

证: 设$\exists x_1,x_2,\cdots,x_n$, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 在$(a,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_n,b)$

上成立 $f'>0$, 故 f 在 $[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_n,b]$ 上严格递增, 从而 f 在 $[a,b]$ 上严格递增. □

定理 3.14(严格单调的充分必要条件) 若函数 f 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 f 在 $[a,b]$ 上严格递增(或严格递减)当且仅当同时成立

(1) 在 (a,b) 上有 $f'\geq 0$ (或 $f'\leq 0$);

(2) $\forall$ 开区间 $I\subset(a,b)$, $f'|_I\neq 0$.

证: “仅当”. 假定 f 在 $[a,b]$ 上严格递增. 定理 3.11 确保了(1)成立; $\forall$ 开区间 $I\subset(a,b)$, 因为 f 在 I 上不是常数, 故 $f'|_I\neq 0$, 即(2)成立.

“当”. 假定(1)、(2)同时成立. 定理 3.11 确保了 f 在 $[a,b]$ 上递增, 即 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, 有 $f(x_1)\leq f(x_2)$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $f|_{[x_1,x_2]}$ 是常数, 从而 $f'|_{(x_1,x_2)}=0$, 与(2)相矛盾, 故 $f(x_1)<f(x_2)$. □

命题 (有实用价值) 设函数 f, g 都在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 并且在 (a,b) 上成立 $f'\geq g'$ (或 $f'>g'$), 那么

(1) 若 $f(a)=g(a)$, 则 $f|_{(a,b]}\geq g|_{(a,b]}$ (或 $f|_{(a,b]}>g|_{(a,b]}$);

(2) 若 $f(b)=g(b)$, 则 $f|_{[a,b)}\leq g|_{[a,b)}$ (或 $f|_{[a,b)}<g|_{[a,b)}$).

证: 函数 $f-g$ 在 $[a,b]$ 上递增(或严格递增).

(1) $\forall x\in(a,b]$, 有 $f(x)-g(x)\geq f(a)-g(a)=0$ (或 $f(x)-g(x)>f(a)-g(a)=0$), 故 $f|_{(a,b]}\geq g|_{(a,b]}$ (或 $f|_{(a,b]}>g|_{(a,b]}$).

(2) $\forall x\in[a,b)$, 有 $f(x)-g(x)\leq f(b)-g(b)=0$ (或 $f(x)-g(x)<f(b)-g(b)=0$), 故 $f|_{[a,b)}\leq g|_{[a,b)}$ (或 $f|_{[a,b)}<g|_{[a,b)}$). □

例 1(必须记住) $\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 总成立不等式 $\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

证：函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上可导，并且 $\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，总有 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$. 于是，

$$f'<(\frac{2}{\pi})',\ f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}\Rightarrow f(x)>\frac{2}{\pi},\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}).\ \square$$

二、与函数的极值有关的一些结论

定理 3.15（极值的充分条件） 设 f 是开区间 (a,b) 上的连续函数，$x_0\in(a,b)$. 那么

(1) 若在 (a,x_0) 上成立 $f'\ge 0$（或 $f'>0$），在 (x_0,b) 上成立 $f'\le 0$（或 $f'<0$），则 $f(x_0)$ 是 f 在 (a,b) 上的最大值（或严格最大值）；

(2) 若在 (a,x_0) 上成立 $f'\le 0$（或 $f'<0$），在 (x_0,b) 上成立 $f'\ge 0$（或 $f'>0$），则 $f(x_0)$ 是 f 在 (a,b) 上的最小值（或严格最小值）.

证：显然. □

定理 3.16（简单情形下极值的充分条件） 设 x_0 是函数 f 的驻点，并且 $f''(x_0)$ 存在，那么

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是 f 的严格极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是 f 的严格极小值；

(3) 若 $f''(x_0)=0$，则各种情形都可能出现.

证：(1) $0>f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$，故 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时成立 $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 于是，在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上成立 $f'>0$；在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上成立 $f'<0$. 这说明 $f(x_0)$ 是 f 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上的严格

最大值, 即是 f 的严格极大值.

(2) 与(1)的证明类似.

(3) $x^3, x^4, -x^4$ 在原点处的情形说明各种可能都出现. □

求有限闭区间上连续函数的最大值和最小值的方法 设函数 f 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 若 f 在 (a,b) 上只有有限个驻点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则

$$\max_{a\le x\le b} f(x) = \max\{f(a), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(b)\};$$
$$\min_{a\le x\le b} f(x) = \min\{f(a), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(b)\}.$$

练习题 3.5(P_{172}) 2(3, 4), 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9(3), 11, 13, 15.

问题 3.5(P_{175}) 4, 8.

三、与函数的凸性有关的一些结论

定义 3.6 设 f 是区间 I 上的函数. 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $\lambda \in (0,1)$, 总成立不等式

$$f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] \le (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$
$$\big(\text{或 } f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] < (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)\big),$$

则称 f 是区间 I 上的凸函数(或严格凸函数).

注意 f 是区间 I 上的凸函数(或严格凸函数), 区间 $J \subset I \Rightarrow f|_J$ 是区间 J 上的凸函数(或严格凸函数).

凸函数的几何意义 f 是区间 I 上的凸函数(或严格凸函数)$\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 以 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 为端点的开线段总是位于(或严格位于) $f|_{(x_1,x_2)}$ 的图像的上方.

证: $\forall \lambda \in (0,1)$, $\exists x \in (x_1, x_2)$ 使得 $\lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$; 反之亦然. 于是

$$f[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] \le (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$f\left[\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2\right]\le\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\Leftrightarrow$$

$$f(x)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1).\ \square$$

注记 3.6′ 函数 f 是开区间(a,b)上的凸函数(或严格凸函数)当且仅当同时成立

(1) f 在(a,b)上连续;

(2) $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, 总成立不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$$

$$\left(\text{或}\, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)\right).$$

证:“仅当”. 假定 f 是开区间(a,b)上的凸函数. 由问题 3.5 的第 1(3)题便知(1)成立; 由凸函数的定义便知(2)成立.

“当”. 假定(1), (2)成立. 由(2)的几何意义和 f 的连续性, 以$(x_1,f(x_1))$和$(x_2,f(x_2))$为端点的开线段总是位于 $f|_{(x_1,x_2)}$ 的图像的上方. 这表明 f 是(a,b)上的凸函数. □

定理 3.17 (Jensen 不等式) 若 f 是区间 I 上的凸函数, 则 $\forall x_1,\cdots,x_n\in I$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$, 总成立不等式

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

当 f 是区间 I 上的严格凸函数时, 上式等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证: 不妨设 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$, 显然 $x_1=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_1\le\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ $\le\lambda_1x_n+\cdots+\lambda_nx_n=x_n$. 这说明不等式的左边有意义. 对 $n\in\mathbb{N}^*$ 应用数学归纳法.

(1) 当$n=1$时, $\lambda_1=1$, 故 $f(\lambda_1 x_1)=\lambda_1 f(x_1)$.

(2) 假定当$n=k\ge 3$时结论成立, 要证当$n=k+1$时结论也成立. 令$\mu_1=\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}},\cdots,\mu_k=\dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}>0$, 则$\mu_1+\cdots+\mu_k=1$, 故由归纳法假定便得到

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k+\lambda_{k+1}x_{k+1})\\
&=f[(1-\lambda_{k+1})(\mu_1 x_1+\cdots+\mu_k x_k)+\lambda_{k+1}x_{k+1}]\\
&\le(1-\lambda_{k+1})f(\mu_1 x_1+\cdots+\mu_k x_k)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\le(1-\lambda_{k+1})[\mu_1 f(x_1)+\cdots+\mu_k f(x_k)]+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\
&=\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_k f(x_k)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1}).
\end{aligned}
$$

当 f 是区间 I 上的严格凸函数时, 上式等号成立当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_k$, $\mu_1 x_1+\cdots+\mu_k x_k=x_{k+1}$, 即$x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$. □

定理 3.18（Jensen 不等式的另一形式） 若 f 是区间I上的凸函数, 则$\forall x_1,\cdots,x_n\in I$, $\beta_1,\cdots,\beta_n>0$, 总成立不等式

$$f\left(\frac{\beta_1 x_1+\cdots+\beta_n x_n}{\beta_1+\cdots+\beta_n}\right)\le\frac{1}{\beta_1+\cdots+\beta_n}[\beta_1 f(x_1)+\cdots+\beta_n f(x_n)].$$

当 f 是区间 I 上的严格凸函数时, 上式等号成立当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$.

定理3.19 f 是区间I上的凸函数(或严格凸函数)$\Leftrightarrow\forall$固定的$x_0\in I$, 函数$\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$I\setminus\{x_0\}$上递增(或严格递增).

证: $\Rightarrow$. 假定 f 是I上的凸函数. $\forall x_1,x_2\in I\setminus\{x_0\}$, $x_1<x_2$, 下述三个不等式$x_1<x_2<x_0$, $x_1<x_0<x_2$和$x_0<x_1<x_2$恰有一个成立. 由凸函数的几何意义即知$\varphi(x_1)\le\varphi(x_2)$.

$\Leftarrow$. 假定$\forall$固定的$x\in I$, 函数$\varphi(y)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$在$I\setminus\{x\}$上递增. $\forall x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, 当$x\in(x_1,x_2)$时, 总成立

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\varphi(x_1)\le\varphi(x_2)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

这说明以 $(x_1,f(x_1))$ 和 $(x_2,f(x_2))$ 为端点的开线段总是位于 $f|_{(x_1,x_2)}$ 的图像的上方. 故 f 是区间 I 上的凸函数. □

定理 3.20 设 I 是以 a,b 为左、右端点的区间. 若函数 f 在 I 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 f 是 I 上的凸函数(或严格凸函数)当且仅当 f' 在 (a,b) 上递增(或严格递增).

证: 仅证严格的情形.

“仅当”. 假定 f 是 I 上的严格凸函数. $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$ 和 $x,y\in(x_1,x_2)$, 分别对 $\varphi_1(x)=\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ 和 $\varphi_2(x)=\dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$ 应用定理 3.19 便有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}.$$

令 $x\to x_1+, y\to x_2-$, 得到 $f'(x_1)<\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<f'(x_2)$. 这说明 f' 在 (a,b) 上严格递增.

“当”. 假定 f' 在 (a,b) 上严格递增. $\forall x_0\in I$, 记 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

则当 $x\in(a,b), x>x_0$ 时, $\exists\xi\in(x_0,x)$ 使得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$, 故

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{x-x_0}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-x_0}>0.$$

当 $x\in(a,b), x<x_0$ 时, $\exists\eta\in(x,x_0)$ 使得 $\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}=f'(\eta)$, 故

$$\varphi'(x)=\frac{\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}-f'(x)}{x_0-x}=\frac{f'(\eta)-f'(x)}{x_0-x}>0.$$

这说明 φ 在 $I\setminus\{x_0\}$ 上严格递增, 从而 f 是 I 上的严格凸函数.

定理 3.21 设 I 是以 a,b 为左、右端点的区间. 若函数 f 在 I 上连续,

在(a,b)上 2 阶可导, 则 f 是I上的凸函数(或严格凸函数)当且仅当在(a,b)上成立 $f''\ge 0$(或在(a,b)上成立 $f''\ge 0$, 并且$\forall (c,d)\subset (a,b)$都有$f''|_{(c,d)}\ne 0$).

证: 由定理 3.20 和定理 3.14. □

例 2(几何平均不大于算术平均) $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, 有不等式

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

等号成立当且仅当$x_1,=x_2=\cdots=x_n$.

证: 在$(0,+\infty)$上成立$(-\ln x)''=(-\frac{1}{x})'=\frac{1}{x^2}>0$, 故$-\ln x$是$(0,+\infty)$上的严格凸函数, 从而

$$-\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le \frac{-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n}{n},$$

$$\ln(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\le \ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).\ \square$$

例 3(算术平均不大于均方根) $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, 有不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\le\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}.$$

等号成立当且仅当$x_1,=x_2=\cdots=x_n$.

证: 在$(0,+\infty)$上成立$\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)''=\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}>0$, 故$-x^{\frac{1}{2}}$是$(0,+\infty)$上的严格凸函数, 从而

$$-\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\le -\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.\ \square$$

练习题 3.5(P_{172}) 17, 19(2, 3, 4), 20, 21, 22, 23.

问题 3.5(P_{175}) 1, 2, 3, 9.

§3.6 L’Hospital 法则

L’Hospital 法则可以认为是连续型的 Stolz 定理；Stolz 定理也可以认为是离散型的 L’Hospital 法则.

定理 3.22 和 3.23($\frac{0}{0}$型) 设 f,g 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 的去心邻域上可导，并且 g,g' 在 x_0 的去心邻域上处处不取零值. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\mathbb{R}_\infty\bigcup\{\infty\}$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

将“$x\to x_0$”换成“$x\to x_0+$，$x\to x_0-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$”后，结论仍然成立.

证： 设 $\delta>0$ 是足够小的常数. 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，在 $[x_0,x]$ 上应用 Cauchy 中值定理知，$\exists\xi\in(x_0,x)$ 使得 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0+)}{g(x)-g(x_0+)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

故 $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$；同理，$\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

对于“$x\to\infty$”的情形， 有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$. □

推论 1($\frac{0}{0}$型) 设 f,g 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 的去心邻域上 n 阶可导，并且 $g,g',\cdots,g^{(n)}$ 在 x_0 的去心邻域上处处不取零值. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n-1)}(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to x_0} g^{(n-1)}(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=l\in\mathbb{R}_\infty\bigcup\{\infty\}$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

将“$x\to x_0$”换成“$x\to x_0+$，$x\to x_0-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$”

后, 结论仍然成立.

定理 3.24（$\frac{?}{\infty}$ **型**） 设 f,g 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 的去心邻域上可导, 并且 g,g' 在 x_0 的去心邻域上处处不取零值. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\mathbb{R}_\infty\bigcup\{\infty\}$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l\,.$$

将 "$x\to x_0$" 换成 "$x\to x_0+$，$x\to x_0-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$" 后, 结论仍然成立.

证: 仅证 $l\in\mathbb{R}$ 和 $l=\infty$, 并且是 $x\to x_0$ 的情形.

(1) $l\in\mathbb{R}$. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<2\delta$ 时成立 $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon$. 故当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, 在 $[x,x_0+\delta]$ 应用 Cauchy 中值定理知, $\exists\xi\in(x,x_0+\delta)$ 使得 $\left|\frac{f(x_0+\delta)-f(x)}{g(x_0+\delta)-g(x)}-l\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l\right|<\varepsilon$, 从而

$$\limsup_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|=\limsup_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x_0+\delta)-f(x)}{g(x_0+\delta)-g(x)}-l\right|\le\varepsilon\,.$$

故 $\limsup\limits_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|=0$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$；同理, $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

(2) $l=\infty$. $\forall A>0,\exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<2\delta$ 时成立 $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|>A$. 故当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, 在 $[x,x_0+\delta]$ 应用 Cauchy 中值定理知, $\exists\xi\in(x,x_0+\delta)$ 使得 $\left|\frac{f(x_0+\delta)-f(x)}{g(x_0+\delta)-g(x)}\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|>A$, 从而

$$\liminf_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\liminf_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x_0+\delta)-f(x)}{g(x_0+\delta)-g(x)}\right|\ge A\,.$$

故 $\liminf\limits_{x\to x_0+}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=+\infty$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$；同理, $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$. □

推论 2（$\frac{?}{\infty}$ **型**） 设 f,g 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 的去心邻域上 n 阶可导, 并且 $g,g',\cdots,g^{(n)}$ 在 x_0 的去心邻域上处处不取零值. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g'(x)=\cdots=$

$\lim\limits_{x\to x_0} g^{(n-1)}(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=l\in\mathbb{R}_\infty\bigcup\{\infty\}$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

将“$x\to x_0$”换成“$x\to x_0+$, $x\to x_0-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$”后, 结论仍然成立.

注记 易将“$0\cdot\infty$型, $\infty-\infty$型, 0^0型, ∞^0型, 1^∞型”的极限化成“$\dfrac{0}{0}$型”或“$\dfrac{?}{\infty}$型”的极限, 再利用 L’Hospital 法则求出来.

例 1(必须记住) 对于常数$\mu>0$, 有$\lim\limits_{x\to0+}x^\mu\ln x=0$; $\lim\limits_{x\to0+}x^x=1$.

解: $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(\ln x)'}{(x^{-\mu})'}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x(-\mu x^{-\mu-1})}=-\dfrac{1}{\mu}\lim\limits_{x\to0+}x^\mu=0$.

$\lim\limits_{x\to0+}\ln x^x=\lim\limits_{x\to0+}x\ln x=0$, 故$\lim\limits_{x\to0+}x^x=1$. □

例 2(一个错误的循环证明) 利用 L’Hospital 法则来证明$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$是错误的. 因为在$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{1}=1$中, $(\sin x)'=\cos x$这一步用到了$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. □

例 3(问题 1.12 的第 4 题, P_{52}) 证: $x_1=\sin x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 故数列$\{x_n\}$严格递减收敛于0. 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin^2x_n}-\frac{1}{x_n^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0+}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0+}\frac{(x^2-\sin^2x)'}{(x^4)'}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{(2x-\sin2x)'}{4(x^3)'}=\lim_{x\to0+}\frac{(2-2\cos2x)'}{12(x^2)'}=\lim_{x\to0+}\frac{4\sin2x}{24x}=\frac{1}{3}.\ \square$$

练习题 3.6(P_{182}) 1(6, 8, 10, 12, 13), 2, 3, 4.