第 11 章　广义积分

主要介绍无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和以 a 为瑕点的暇积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的收敛判别法. 这些收敛判别法与级数的收敛判别法完全类似, 说明离散与连续是一对矛盾.

本章始终约定:

(1) 在无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 中，$f(x)$ 在任何有限闭区间 $[a,A]$ 上可积, $a<A<+\infty$;

(2) 在以 a 为瑕点的暇积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，$f(x)$ 在任何有限闭区间 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积, $0<\varepsilon<b-a$.

§11.1　非负函数无穷积分的收敛判别法

定理 11.1　设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛当且仅当 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $[a,+\infty)$ 上的有界函数. (类似于“正项级数收敛当且仅当部分和数列有界”)

定理 11.2(非负函数无穷积分的比较判别法)　若 $0\le f(x)\le g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上成立, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. (类似于“正项级的比较判别法”)

定理 11.3 (非负函数无穷积分比较判别法的极限形式) 设 $f(x)\ge 0$, $g(x)>0$ 在 $[a,+\infty)$ 成立, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散;

(2) 当 $l=0$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

(类似于“正项级比较判别法的极限形式”)

定理 11.4　设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, $\{A_n\}(A_1=a)$ 是递增趋向

于 $+\infty$ 的数列, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)dx)$ 同敛散, 并且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)dx).$$

(类似于“正项级与任意加括号后所得新级数同敛散”)

例 1 (1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}<+\infty, & p>1;\\ =+\infty, & p\le 1.\end{cases}$

(2) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\log x)^p}dx\begin{cases}<+\infty, & p>1;\\ =+\infty, & p\le 1.\end{cases}$

注记 1 通常将 $[a,+\infty)$ 上的非负函数 $f(x)$ 与 $\frac{1}{x^p}$ 或 $\frac{1}{x(\log x)^p}$ 作比较来判断 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性.

例 2 当 $\alpha>4$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$ 收敛, 但 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$ 不存在.

证: 只需验证正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{xdx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x})$ 收敛即可. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 有

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{xdx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}\le(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+(n\pi)^{\alpha}\sin^2 x}$$

$$=(n+1)\pi\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(n\pi)^{\alpha}\sin^2 x}=2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(n\pi)^{\alpha}\sin^2 x}$$

$$\le 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(n\pi)^{\alpha}(\frac{2}{\pi})^2x^2}\quad (t=(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\tfrac{2}{\pi}x)$$

$$\le\frac{2(n+1)\pi}{(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+t^2}\le\frac{M}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

由 $\frac{\alpha}{2}-1>1$, 即知 $\sum_{n=0}^{\infty}(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{xdx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x})$ 收敛. □

注记 2 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的必要条件不是 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, 而是

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+A} f(x)dx=0\ \ (A>0).$$

练习题 11.1(P_4) 1(5, 6), 2, 3, 4.

§11.2 无穷积分的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法

定理 11.5(Cauchy 收敛原理) 设$F(x)$是$[a,+\infty)$上的函数, 则存在有限极限$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$当且仅当$\forall\varepsilon>0,\exists X\ge a$, 使得$\forall x,y>X$成立

$$\left|F(y)-F(x)\right|<\varepsilon.$$

(类似于“数列的 Cauchy 收敛原理”, 定理 2.10)

定理 11.6(无穷积分的 Cauchy 收敛原理) 无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛当且仅当$\forall\varepsilon>0,\exists X\ge a$, 使得$\forall x,y>X$成立

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right|<\varepsilon.$$

(类似于“级数的 Cauchy 收敛原理”)

定理 11.7 $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$收敛$\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛.

(类似于“绝对收敛级数一定收敛”)

注记 11.7′ 若$\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$收敛, 则称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛; 若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 但$\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$发散, 则称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$条件收敛.

例 1 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$条件收敛.

解: $\int_1^A\dfrac{\sin x}{x}dx=-\int_1^A\dfrac{1}{x}d\cos x=-\dfrac{\cos x}{x}\Big|_1^A-\int_1^A\dfrac{\cos x}{x^2}dx$ 当$A\to+\infty$时存在有限极限(因为比较判别法说明$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}dx$收敛). 而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin x\right|}{x}dx\ge\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin x\right|}{(n+1)\pi}dx\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}=+\infty.\ \square$$

定理 11.8(第二积分中值定理) 设$f(x)$在$[a,b]$上可积. 若$g(x)$在$[a,b]$上非负递减, 则必存在$\xi\in[a,b]$使得$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi}f(x)dx$; 若$g(x)$在$[a,b]$上非负递增, 则必存在$\eta\in[a,b]$使得$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_{\eta}^{b}f(x)dx$.

证: 仅证第一个等式. 为了使思路清楚, 可假定$f(x)$是连续函数, $g(x)$是C^1函数, 以便利用分部积分公式. 否则利用积分的定义和 Abel 分部求和法.

不妨设 $g(a)>0$, 否则 $g(x)\equiv 0$, 结论已经成立. 因为 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故可记 $M=\max\limits_{a\le x\le b}F(x),\ m=\min\limits_{a\le x\le b}F(x)$. 如果能证明不等式

$$mg(a)\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le Mg(a),$$

结论就容易得到了, 因为 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $F(\xi)=\dfrac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)F(\xi)=g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

下面证所需要的不等式.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)dF(x)=g(x)F(x)\Big|_a^b+\int_a^b F(x)(-g'(x))dx$$

$$\begin{cases}\ge g(b)F(b)+m\int_a^b(-g'(x))dx=g(b)F(b)+m(g(a)-g(b))\ge mg(a);\\ \le g(b)F(b)+M\int_a^b(-g'(x))dx=g(b)F(b)+M(g(a)-g(b))\le Mg(a).\square\end{cases}$$

定理 11.9(第二积分中值定理的推广) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则必存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

证: 不妨设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减. 由于 $\varphi(x)=g(x)-g(b)$ 在 $[a,b]$ 上非负递减, 故存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)[g(x)-g(b)]dx=[g(a)-g(b)]\int_a^\xi f(x)dx, \qquad \text{(定理 11.8)}$$

即 $$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_a^b f(x)dx-g(b)\int_a^\xi f(x)dx.\ \square$$

定理 11.10(无穷积分的 Dirichlet 判别法) 若无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 满足

(1) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;

(2) $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界,

则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

(类似于“级数的 Dirichlet 判别法”)

证：由第二积分中值定理的推论，对于 $a \le A < B < +\infty$，有

$$\int_A^B f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^\xi f(x)dx + g(B)\int_\xi^B f(x)dx$$

$$= g(A)[F(\xi) - F(A)] + g(B)[F(B) - F(\xi)].$$

显然当 A,B 充分大时，$\left|\int_A^B f(x)g(x)dx\right|$ 充分小，由无穷积分的 Cauchy 收敛原理便知 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛. □

推论 11.10′ 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin xdx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)\cos xdx$ 都收敛.

定理 11.11（无穷积分的 Abel 判别法） 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 满足

（1） $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界；

（2） $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

(类似于“级数的 Abel 判别法”)

证：由第二积分中值定理的推论，对于 $a \le A < B < +\infty$，有

$$\int_A^B f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^\xi f(x)dx + g(B)\int_\xi^B f(x)dx.$$

显然当 A,B 充分大时，$\left|\int_A^B f(x)g(x)dx\right|$ 充分小，由无穷积分的 Cauchy 收敛原理便知 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛. □

例 2 当 $p>1$ 时，$\int_0^{+\infty}\sin x^p dx$ 和 $\int_0^{+\infty}\cos x^p dx$ 都收敛；当 $0<p\le1$ 时，$\int_0^{+\infty}\sin x^p dx$ 和 $\int_0^{+\infty}\cos x^p dx$ 都发散.

解：当 $p>1$ 时，$\int_0^{+\infty}\sin x^p dx$ 和 $\int_0^{+\infty}\cos x^p dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{1-\frac{1}{p}}}dx$ 和 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{1-\frac{1}{p}}}dx$ 的敛散性相同. 由推论 11.10′，便知 $\int_0^{+\infty}\sin x^p dx$ 和 $\int_0^{+\infty}\cos x^p dx$ 收敛. 当 $0<p\le1$ 时，$\int_0^{+\infty}\sin x^p dx$ 和 $\int_0^{+\infty}\cos x^p dx$ 与 $\int_1^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1}\sin xdx$ 和 $\int_1^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1}\cos xdx$ 的敛散性相同.

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{\frac{1}{p}-1}\sin xdx \ge (2n\pi)^{\frac{1}{p}-1}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin xdx = 2(2n\pi)^{\frac{1}{p}-1};$$

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} x^{\frac{1}{p}-1}\cos x dx \geq (2n\pi-\tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{p}-1}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2(2n\pi-\tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{p}-1}.$$

这说明$\int_1^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1}\sin x dx$和$\int_1^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1}\cos x dx$不满足 Cauchy 收敛原理. □

练习题 11.2（P_{10}） 2(1, 4), 3, 4.

问　题 11.2（P_{10}） 2, 5, 6.

§11.3 瑕积分的收敛判别法

对以 a 为瑕玷的瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 作变量代换 $x = a + \frac{1}{y}$，便化成无穷积分 $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(a+\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}\,dy$.（因此无穷积分的收敛判别法可以推广到瑕积分，但用起来不太方便）

定理 11.1′ 设 $f(x)$ 是 $(a,b]$ 上的非负函数，则瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛当且仅当 $F(x)=\int_x^b f(t)\,dt$ 是 $(a,b]$ 上的有界函数.（类似于"正项级数收敛当且仅当部分和数列有界"）

定理 11.2′（非负函数瑕积分的比较判别法） 若 $0 \le f(x) \le g(x)$ 在 $(a,b]$ 上成立，则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛.（类似于"正项级的比较判别法"）

定理 11.3′（非负函数瑕积分比较判别法的极限形式） 设 $f(x) \ge 0$，$g(x) > 0$ 在 $(a,b]$ 成立，$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$，则

（1） 当 $0 < l < +\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散；

（2） 当 $l = 0$ 时， $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛；

（3） 当 $l = +\infty$ 时， $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散.

（类似于"正项级比较判别法的极限形式"）

定理 11.4′ 设 $f(x)$ 是 $(a,b]$ 上的非负函数，$\{A_n\}\,(A_1 = b)$ 是递减趋向于 a 的数列，则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 与正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\int_{A_{n+1}}^{A_n} f(x)dx)$ 同敛散，并且

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{A_{n+1}}^{A_n} f(x)dx).$$

（类似于"正项级与任意加括号后所得新级数同敛散"）

定理 11.6′（瑕积分的 Cauchy 收敛原理） 以 a 为瑕玷的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists X \in (a,b]$，使得 $\forall x, y \in (a, X)$ 成立

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon .$$

（类似于"级数的 Cauchy 收敛原理"）

定理 11.7′ 对以 a 为瑕玷的暇积分，有 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛.
(类似于“绝对收敛级数一定收敛”)

定理 11.10′(瑕积分的 Dirichlet 判别法) 若瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 满足

(1) $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调，并且 $\lim\limits_{x\to a+} g(x)=0$；

(2) $F(x)=\int_x^b f(t)dt$ 在 $(a,b]$ 上有界，

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.
(类似于“级数的 Dirichlet 判别法”)

定理 11.11′(瑕积分的 Abel 判别法) 若瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 满足

(1) $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调有界；

(2) $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.
(类似于“级数的 Abel 判别法”)

例 1

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx \begin{cases} <+\infty, & p<1; \\ =+\infty, & p\geq 1. \end{cases}$$

注记 通常将 $(a,b]$ 上的非负函数 $f(x)$ 与 $\dfrac{1}{(x-a)^p}$ 作比较来判断以 a 为瑕玷的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的敛散性.

例 2 当 $p,q>0$ 时，瑕积分 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛.

广义积分的 Cauchy 主值 当存在有限极限时，称

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$$

为无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 的 Cauchy 主值；称

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right) \quad (a<c<b)$$

为以 c 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的 Cauchy 主值.

练习题 11.3(P_{17}) 1(2, 4, 6).

问　题 11.3(P_{18}) 5, 6, 7.