第七章　拟合优度检验

张爱莲

新疆大学生命科学与技术学院　新疆生物资源基因工程重点实验室

zalxju@gmail. com

20101209

课前提问

1.显著性检验的基本步骤

(1) 做出无效假设

(2) 研究抽样分布，求出统计量如：u,t,F,χ^2等

(3) 选定显著水平α（小概率标准）

(4) 与临界值U_α比较，做出统计推断

2. H_0的含义

实得差异是由于误差引起的, 这种假设称为无效假设. 或者说实验所得样本是对照总体的一个随机样本。

3. 显著水平

用来确定否定或接受无效假设的概率标准叫显著水平（α）。

4. 上侧检验、下侧检验、双侧检验

$H_A : \mu > \mu_0$时, H_0的拒绝域为$u > u_\alpha$ 上侧检验

$H_A : \mu < \mu_0$时, H_0的拒绝 域为$u < -u_\alpha$ 下侧检验

$H_A : \mu \neq \mu_0$时,H_0的拒绝域为$u > u_{\alpha/2}$ 或$u < -u_{\alpha/2}$ 双侧/双尾检验

5. 截至目前，我们已经学过几种假设检验的方法？分别列出各种方法的应用条件和计算统计量.

本章内容

7.1 离散型数据χ2统计量和χ2分布

7.2 拟合优度检验

7.3 独立性检验

次数资料的χ^2检验的内容

- 拟合优度检验
- 独立性检验

拟合优度检验 （吻合度检验）

理论数可以通过一定的理论分布或某种学说推算出。用实际观察数与理论数直接比较，从而得出两者之间是否吻合。这一类检验称为吻合度检验.

独立性检验

分析两类因子是相互独立还是彼此相关。理论值的推算没有什么理论或学说作依据，这时可假设观察的各属性之间没有关联，然后证明这种无关联的假设是否成立。这种检验称为独立性检验。

7.1 离散型数据χ^2统计量和χ^2分布

一、χ^2 统计量的意义

例：圆粒豌豆与皱粒豌豆杂交，第二代的分离比为336粒圆粒，101粒皱粒。问这种分离比例是否符合孟德尔的3：1分离比。

	圆粒	皱粒	总数
观察数O	O_1=336	O_2 =101	437
理论数 T	T_1=327.75	T_2=109.25	437
O-T	8.25	-8.25	
$(O-T)^2$	68.0625	68.0625	

- 度量实际观察次数与理论次数偏离的程度，最简单的办法是求出实际观察次数与理论次数的差数。

- 为了避免正、负抵消，计算$\Sigma(O-T)^2$，其值越大，实际观察次数与理论次数相差亦越大，反之则越小。

- χ^2 是度量实际观察次数与理论次数偏离程度的一个统计量。

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$$

- χ^2越小，表明实际观察次数与理论次数越接近；
- χ^2 =0，表示两者完全吻合；
- χ^2越大，表示两者相差越大。

二、 χ^2统计量的定义

Pearson 提出可以用χ^2 判断离散性数据的实际观察数与理论数之间的差异，所用的公式为：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i} \qquad \textbf{(7-1)}$$

其中：O i 表示第 i 组的观察数，

Ti表示第 i 组的理论数，

总观察数为n 。

χ^2的连续性矫正

- 由(7-1)式计算的χ^2只是近似地服从连续型随机变量χ^2分布。在对次数资料进行χ^2检验利用连续型随机变量χ^2分布计算概率时，常常偏高，特别是当**自由度为1时，偏差较大。**

Yates矫正后的χ^2值记为 χ_c^2

$$\chi_c^2 = \sum \frac{(|O_i - T_i| - 0.5)^2}{T_i}$$

- 当自由度大于1时，χ^2分布与连续型随机变量χ^2分布相近似，这时，可不作连续性矫正， 但要求各组内的理论次数不小于5。

- 若某组的理论次数小于5，则应把它与其相邻的一组或几组合并，直到理论次数大于5为止。

三、χ^2检验的步骤

1.建立假设：

$H_0: O-T=0$,实际观察次数与理论次数相符合,

$\mathrm{H_A}: O\text{-}T \neq 0$,实际观察次数与理论次数不相符合。

2.计算χ^2统计量：

3.由df 查χ^2 值表得临界值：$\chi^2_{0.05}$ 、$\chi^2_{0.01}$，将实测 χ^2 或 χ^2_c 与$\chi^2_{0.05}$、$\chi^2_{0.01}$ 比较，做出统计推断：

$\chi^2 > \chi^2_\alpha$ 时，拒绝零假设

$\chi^2 < \chi^2_\alpha$ 时，接受零假设

7.2　拟合优度检验

一、意义

- 判断观察值与理论值是否吻合。

- 即实际观察的属性类别分配是否符合已知属性类 别分配理论或学说的假设检验称为拟合优度检验。

二、拟合优度检验的步骤

1、假设

H_0： H_0： O=T，观察数符合已知属性类别分配的理论或学说。

H_A：H_AO≠T，观察数不符合已知属性类别 分配的理论或学说。

2、计算各理论次数

在无效假设成立的条件下，按已知的理论或学说计算的各个属性类别理论次数。

3、 统计量自由度的确定

拟合优度检验的自由度等于属性类别分类数减 1 。若属性类别分类数为k，则自由度为 k-1 。

4、将计算所得$\chi 2$或χ_c^2值与查表所得χ_α^2的临界值 比较：

- 若χ^2 (或χ^2_c)＜$\chi^2_{k-1，0.05}$，P＞0.05，表明实际观察次数与 理论次数差异不显著，可以认为实际观察的属性类别分配符合已知属性类别分配的理论或学说；
- 若χ^2 (或χ^2_c) $\geqslant \chi^2_{k-1,0.05}$，$P$≤0.05，表明实际观察次数与理论次数差异显著；
- 若χ^2 (或χ^2_c) $\geqslant \chi^2_{k-1,0.01}$，P≤0.01，表明实际观察次数与理论次数差异极显著 。

【例7.1】 用正常翅的野生型果蝇与残翅果蝇杂交，F_1代均表现为正常翅。F_1代自交，在F_2代中包含311个正常翅，和81个残翅。问这一分离比是否符合孟德尔3：1的理论比。

	正常翅	残翅	总数
实际观测数	311	81	392
理 论 数	294	98	392

$O-T$（未矫正） 17 17

$(O-T)^2$ 289 289

$(O-T)^2/T$ 0.983 2.949

$$\chi^2 = 0.983+2.949 = 3.932$$

H_0：$O-T=0$，$\alpha=0.05$，$df=1$，$x^2_{0.05}=3.841$，$x^2 > x^2_{0.05}$

结论：正常翅与残翅的分离比不符合3：1

以上计算是在$df=1$但未作矫正的结果，下面计算矫正后的 χ_c^2

	正常翅	残翅
$\lvert O-T\rvert-0.5$	16.5	16.5
$(\lvert O-T\rvert-0.5)^2$	272.25	272.25
$(\lvert O-T\rvert-0.5)^2/T$	0.926	2.778

$$\chi_c^2 = 0.926+2.778 = 3.704$$

H_0：$O-T=0$， $\alpha=0.05$， $df=1$， $\chi^2_{0.05}=3.841$， $\chi^2<\chi^2_{0.05}$

结论：正常翅与残翅的分离比符合3：1

【例7.2】 研究牛的毛色和角的有无两对性状分离，用黑色无角牛和红色有角牛杂交，子二代出现黑色无角牛192头，黑色有角牛78头，红色无角牛72头，红色有角牛18头，共360头。问这两对性状是否符合孟德尔遗传规律9：3：3：1的遗传比例?

H_0：实际观察次数之比符合9：3：3：1的理论比例。

H_A：实际观察次数之比不符合9：3：3：1的理论比例。

$k=4$：自由 度$df=k-1=4-1=3>1$，故计算χ^2。

依据各理论比例9:3:3:1计算理论次数：

黑色无角牛T_1：360×9/16=202.5

黑色有角牛T_2：360×3/16=67.5

红色无角牛T_3：360×3/16=67.5

红色有角牛T_4：360×1/16=22.5

列表计算χ^2

类　型	实际观察次数 O	理论次数 T	$O-T$	$(O-T)^2/T$
黑色无角牛	192 (O_1)	202.5 (T_1)	-10.5	0.5444
黑色有角牛	78 (O_2)	67.5 (T_2)	+10.5	1.6333
红色无角牛	72 (O_3)	67.5 (T_3)	+4.5	1.6333
红色有角牛	18 (O_4)	22.5 (T_4)	-4.5	0.9000
总　计	360	360	0	4.711

$$\chi^2=\sum\frac{(O_i-T_i)^2}{T_i}$$

$$=0.5444+1.6333+1.6333+0.9$$

$$=4.711$$

查临界χ^2值，作出统计推断

当df=3时，$\chi^2_{0.05(3)}$=7.81，因 $\chi^2<\chi^2_{005(3)}$，P>0.05，不能否定H_0,表明实际观察次数与理论次数差异不显著， 可以认为毛色与角的有无两对性状杂 交二代的分离现象符合孟德尔遗传规律中9∶3∶3∶1的遗传比例。

7.3 独立性检验

7.3.1 独立性检验的意义

- 对次数资料，除进行拟合优度检验外， 有时 χ^2 检验的理论值事先并不知道，而需要从样本资料中去推算，分析两类因子是相互独立还是彼此相关。
- 具体的做法是，考虑样本中的各处理之间是否有关联，根据它们之间无关联的假设计算理论数，在一定的自由度下以显著性水平 α 做推断，若拒绝无关联的假设，则处理之间的差异是显著的。

（一）意义：

- 根据次数资料判断两类因子彼此相关或相互独立的假设检验就是独立性检验。
- 独立性检验实际上是基于次数资料对因子间相关性的研究

此时

H_0 : 两类因子相互独立

H_A : 两类因子彼此相关

（二）、独立性检验与拟合优度检验的区别：

1. 独立性检验的次数资料是按两因子属性类别进行归组。根据两因子属性类别数的不同构成2×2、$2\times c$、$r\times c$列联表（r 为行因子的类别数，c 为列因子的类别数）。

而拟合优度检验只按某一因子的属性类别如性别、表现型等将次数资料归组。

2 拟合优度检验按已知的理论或学说计算理论次数。独立性检验的理论次数是在两因子相互独立的假设下计算的。

3 在拟合优度检验中确定自由度时，只有一个约束条件：自由度为属性类别数减1（k-1）。

在$r \times c$列联表的独立性检验中：

自由度为(r-1）(c-1)

（三）理论次数的计算方法

理论次数是在两因子相互独立的假设下根据样本数据的比例进行计算：

$$\text{某格理论次数} = \frac{\text{格所在行总数} \times \text{格所在列总数}}{\text{总总数}}$$

例如：

患病情况 注射情况	患病	未患病	合计
注射	30	130	160
未注射	40	80	120
合计	70	210	280

（四）、独立性检验的方法

1、 先将资料整理成列联表

2、 提出无效假设与备择假设

H_0：发病与否和注射疫苗无关，即二因子相互独立。

H_A：发病与否和注射疫苗有关，即二因子彼此相关。

3、 计算理论次数

4、 计算 χ^2或χ_c^2 值

5、 由自由度df=（r-1)(c-1）查临界χ^2值，作出统计推断

7.3.2 独立性检验的方法

一、 2×2 列联表的独立性检验

二、2×c列联表的独立性检验

三 r×c列联表的独立性检验

一、 2×2 列联表的独立性检验

其自由度 $df=(r-1)(c-1)=(2-1)(2-1)=1$，

在进行χ^2检验时，需作连续性矫正，应计算χ^2_c值。

2×2列联表的一般形式

	1	2	行总合$T_{i\cdot}$
1	O_{11} (T_{11})	O_{12} (T_{12})	$T_{1\cdot}=O_{11}+O_{12}$
2	O_{21} (T_{21})	O_{22} (T_{22})	$T_{2\cdot}=O_{21}+O_{22}$
列总合$T_{\cdot j}$	$T_{\cdot 1}=O_{11}+O_{21}$	$T_{\cdot 2}=O_{12}+O_{22}$	$T_{\cdot\cdot}=O_{11}+O_{12}+O_{21}+O_{22}$

【例7.4】研究流感活毒疫苗的接种效果，在某大学5176个学生中实验的结果如表：流感活疫苗接种效果2×2联列表

结果 处理	发病人数	不发病人数	总计
免疫	$O_1=5$ $T_1=26.3$	$O_2=1472$ $T_2=1450.7$	1477
不免疫	$O_3=87$ $T_3=65.7$	$O_4=3612$ $T_4=3633.3$	3699
总计	92	5084	5176

检验疫苗的免疫效果，如果两组的发病率是相同的，那么发病与否与免疫与否无关，即发病与是否免疫相互独立。对这个独立性假设做检验。

1. H_0: 两变量无关的前提下 **O -T=0**

H_A: O -T≠0

2. 计算各个理论数

$$\text{理论数}T_{ij}=\frac{(i\text{行总数})\times(j\text{列总数})}{\text{总数}}$$

$$T_1(\text{免疫组发病人数})=\frac{1477\times 92}{5176}=26.3$$

$$T_2(\text{免疫组不发病人数})=\frac{1477\times 5084}{5176}=1450.7$$

$$T_3(\text{对照组发病人数})=\frac{3699\times 92}{5176}=65.7$$

$$T_4(\text{对照组不发病人数})=\frac{3699\times 5084}{5176}=3633.3$$

3. 计算χ^2值

$$\chi^2=\frac{(5-26.3)^2}{26.3}+\frac{(1472-1450.7)^2}{1450.7}+\frac{(87-65.7)^2}{65.7}+\frac{(3612-3633.3)^2}{3633.3}=23.45$$

df=(2−1)(2−1)=1

$\chi^2_{0.01(1)}=6.63$

$\chi^2>\chi^2_{0.01(1)}$

拒绝H_0，流感活毒疫苗接种的效果极显著 。

二、2×c列联表的独立性检验

2×c列联表是行因子的属性类别数为2，列因子的属性类别数为c（c≥3）的列联表。其自由度df = (2-1) (c -1) = (c-1)，因为c≥3，所以自由度大于2，在进行χ^2检验时，不需作连续性矫正。

2×c表的一般形式见下表

	1	2	…	c	行总和$T_{i\cdot}$
1	A_{11}	A_{12}	…	A_{1c}	$T_{1\cdot}$
2	A_{21}	A_{22}	…	A_{2c}	$T_{2\cdot}$
列总和$T_{\cdot j}$	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	…	$T_{\cdot c}$	总总和$T_{\cdot\cdot}$

【例7.6】 在甲、乙两地进行水牛体型调查，将体型按优、良、中、劣 四个等级分类，其结果见下表，问两地水牛体型构成比是否相同。

两地水牛体型分类统计

	优	良	中	劣	行总和 $T_{i.}$
甲	10（13.3）	10(10.0)	60(53.3)	10(13.4)	90
乙	10(6.7)	5(5.0)	20(26.7)	10(6.6)	45
列总和 $T_{.j}$	20	15	80	20	135

这是一个2×4列联表独立性检验的问题。

检验步骤如下：

1. 提出无效假设与备择假设

H_0：水牛体型构成比与地区无关，即两地水牛体型构成比相同。

H_A：水牛体型构成比与地区有关，即两地水牛体型构成比不同。

2. 计算各个理论次数，并填在各观察次数后的括号中

计算方法与2×2表类似，即根据两地水牛体型构成比相同的假设计算。

甲地优等组理论次数： T_{11}=90×20/135=13.3

乙地优等组理论次数： T_{21}=45×20/135=6.7

或T_{21}=20-13.3=6.7；

其余各个理论次数的计算类似。

3. 计算χ^2值

$$\chi^2=\frac{(10-13.3)^2}{13.3}+\frac{(10-10)^2}{10}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(20-26.7)^2}{26.7}+\frac{(10-6.6)^2}{6.6}$$

$$=7.582$$

4.查临界χ^2值，自由度df=3，作出统计推断

因为$\chi^2_{0..05(3)}=7.81$，而$\chi^2=7.582<\chi^2_{0..05(3)}$，$p>0.05$，不能否定$H_0$, 认为甲、乙两地水牛体型构成比相同。

此外，有时需将数量性状资料以等级分类，如剪毛量分为特等、一等、二等，产奶量分为高产与低产等，这些由数量性状资料转化为质量性状的次数资料检验，也可用χ^2检验。

【例7.7】分别统计了*A*、*B*两个品种各67头经产母兔的产仔情况，结果见表，问*A*、*B*两品种的产仔构成比是否相同？

	9头以下	10-12头	13头以上	行总和 $T_{i.}$
A	17	44	6	67
B	5	33	29	67
列总和 $T_{.j}$	22	77	35	134

三 $r\times c$列联表的独立性检验

$r\times c$表是指行因子的属性类别数为r（$r>2$），列因子的属性类别数为c($c>2$)的列联表。其一般形式见表。

	1	2	…	c	行总和 $T_{i\cdot}$
1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1c}	$T_{1\cdot}$
2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2c}	$T_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	O_{r1}	O_{r2}	…	O_{rc}	$T_{r\cdot}$
列总和 $T_{\cdot j}$	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	…	$T_{\cdot c}$	$T_{\cdot\cdot}$

【例7.8】下表为不同灌溉方式下水稻叶片衰老情况的调查资料，试测定稻叶衰老是否与灌溉无关.

水稻在不同灌溉方式下叶片的衰老情况

灌溉方式	绿叶数	黄叶数	枯叶数	总计
深水	146（146.09）	7（8.78）	7(10.53）	160
浅水	183（180.26）	9（11.24）	13(13.49）	205
湿润	152（160.04）	14（9.98）	16（11.98）	182
总计	481	30	36	547

H_0:水稻叶衰老与灌溉方式无关。

$$T_1=\frac{160\times 481}{547}=140.69 \qquad T_4=\frac{205\times 481}{547}=180.26$$

$$T_2=\frac{160\times 30}{547}=8.78 \qquad T_5=\frac{205\times 30}{547}=11.24$$

$$T_3=\frac{160\times 36}{547}=10.53 \qquad T_6=\frac{205\times 36}{547}=13.49$$

$$T_7=160.04$$

$$T_8=9.98$$

$$T_9=11.98$$

$$\chi^2=\frac{(146-140.69)^2}{140.69}+\frac{(7-8.78)^2}{8.78}+\cdots+\frac{(16-11.98)^2}{11.98}=5.62$$

$$df=(3-1)(3-1)=4$$

$$\chi^2_{4,0.05}=9.49,\quad \chi^2\langle\chi^2_\alpha$$

∴接受H_0，不同灌溉方式对水稻叶片的衰老情况没有影响。

复　习

1. 统计假设检验的基本原理是什么？

2. 无效假设的含义是什么？以单个样本的假设检验为例，说明怎样通过无效假设以抽样分布为基础建立统计推断的方法。

3. 截至目前，我们已经学过几种假设检验的方法？分别列出各种方法的应用条件和计算统计量.

4. 次数资料拟合优度检验与独立性检验的关系？它们的理论数怎样计算？

课前提问

1. 次数资料的 χ^2 统计量的意义及计算式

2. 什么拟合优度检验?

3.次数资料拟合优度检验与独立性检验的关系？它们的理论数怎样计算?