6.3 数据依赖的公理系统

☞公理系统

- 给定一组公式(公理)和推理规则，由这些公式依据推理规则得到更多的公式，公理、规则和推导出的公式构成公理系统。如欧氏几何即为公理系统。
- 公理系统的有效性：

  通过推理规则得到的公式(形式推演)与通过逻辑推理得到的结论(逻辑推论)一致，即形式推演的结论是有效的。
- 公理系统的完备性：

  通过逻辑推理得到的结论(逻辑推论)，都可以用形式推演得到，逻辑推理是完备的。

6.3 数据依赖的公理系统

☞ **函数依赖的公理系统**

- **定义**：设关系模式$R<U，F>$，其中F是属性集U上的函数依赖集，X,Y⊆U，对其任何一个关系实例r，若函数依赖$X→Y$都成立, 则称F逻辑蕴含$X→Y$，记为：F╞ X →Y 。
- 函数依赖的推理规则由Armstrong于1974年首先提出，故函数依赖的公理系统又称作Armstrong公理系统。
- Armstrong公理系统：

  设关系模式$R<U，F>$，其中F是属性集U上的函数依赖集。对关系模式$R<U，F>$有以下推理规则：

  - **(A1)**自反律**(Reflexivity)**：若**Y ⊆X ⊆U**，则**F╞ X→Y**。

    证明：对于关系模式**R<U,F>**的任一关系**r**中的任意两个元组**t**和**s**，若**t[X]=s[X]**，由于**Y ⊆X**，则**t[Y]=s[Y]**，故**X→Y**。

注：*A1属于逻辑推理规则，其证明方法属于语义证明，下同。*

6.3 数据依赖的公理系统

- **(A2)增广律(Augmentation):**

  若F $\models$ X→Y，Z $\subseteq$U，则F $\models$ XZ→YZ。

  证明：对于关系模式R<U,F>的任一关系r中的任意两个元组t和s，若t[XZ]=s[XZ]；则有t[X]=s[X]和t[Z]=s[Z]；由X→Y，则有t[Y]=s[Y]；所以t[YZ]=s[YZ]，故F $\models$XZ→YZ。

- **(A3)传递律(Transitivity):**

  若F $\models$ X→Y， F $\models$ Y→Z，则F $\models$ X→Z。

  证明：对于关系模式*R*<*U*，*F*> 的任一关系 r中的任意两个元组 *t*和*s*，若*t*[*X*]=*s*[*X*]，由于*X*→*Y*，有 *t*[*Y*]=*s*[*Y*]；再由*Y*→*Z*，有*t*[*Z*]=*s*[*Z*]，所以F $\models$ *X*→*Z*。

注：*自反律(A1)是平凡的函数依赖，与函数依赖集F无关，是关系自身就有的性质。*

- **定理**：**以上三条推理规则是正确的。(已证明)**

6.3 数据依赖的公理系统

- **定义**：由自反律(A1)、增广律(A2)和传递律(A3)三条推理规则构成**Armstrong公理系统**。
- Armstrong公理系统还可以得到以下三条推理规则：
  - 合并规则：$\{X \to Y, X \to Z\} \models X \to YZ$。

证明：(1) $X \to Y$　　已知(P规则)

(2) $X \to YX$　　A2，(1)

(3) $X \to Z$　　已知

(4) $YX \to YZ$　　A2，(3)

(5) $X \to YZ$　　A3，(2)，(4)

$\therefore \{X \to Y, X \to Z\} \models X \to YZ$

注：*合并规则属于逻辑推理规则，其证明方法属于逻辑推理，下同。*

6.3 数据依赖的公理系统

- 分解规则：$\{X\rightarrow Y，Z\subseteq Y\}\models X\rightarrow Z$。

证明：(1) $X\rightarrow Y$　　已知

(2) $Z\subseteq Y$　　已知

(3) $Y\rightarrow Z$　　$A1$

(4) $X\rightarrow Z$　　$A3$，(1)，(3)

$\therefore \{X\rightarrow Y，Z\subseteq Y\}\models X\rightarrow Z$

- 伪传递规则：$\{X\rightarrow Y，WY\rightarrow Z\}\models WX\rightarrow Z$。

证明：(1) $X\rightarrow Y$　　已知

(2) $WX\rightarrow WY$　　$A2$，(1)

(3) $WY\rightarrow Z$　　已知

(4) $WX\rightarrow Z$　　$A3$，(2)，(3)

$\therefore \{X\rightarrow Y，WY\rightarrow Z\}\models WX\rightarrow Z$

6.3 数据依赖的公理系统

- **定理：**$X \rightarrow A_1A_2 \ldots A_k$成立的充分必要条件是$X \rightarrow A_i$成立（i=1, 2, …，$k$）。

  证明方法：由分解规则证必要性，合并规则证充分性。

  （作业：证明此定理）