



6.3 数据依赖的公理系统(最小函数依赖集)

最小函数依赖集

函数依赖集的闭包是给定FD所蕴涵的全部的属性间的函数依赖关系。怎样用最少的函数依赖来表达全部的属性间的依赖关系？这就是最小函数依赖集讨论的内容。

* **定义：** 假设在关系模式 $R\langle U, F \rangle$ 上有两个函数依赖集 F 和 G 。如果 $F^+ = G^+$ ，则称 F 和 G 是等价的，或称 F 与 G 相互覆盖。

* **定理：** $F^+ = G^+$ ，当且仅当 $F \subseteq G^+$ 且 $G \subseteq F^+$ 。

证明： (必要性) 任给一个FD: $X \rightarrow Y \in F$ ，则 $X \rightarrow Y \in F^+$ ，又由 $F^+ = G^+$ ，得 $X \rightarrow Y \in G^+$ ，故 $F \subseteq G^+$ ；同理可证 $G \subseteq F^+$ 。

(充分性) 先证 $F^+ \subseteq G^+$ ：任取 $X \rightarrow Y \in F^+$ ，有 $Y \in X_F^+$ ，因为 $F \subseteq G^+$ ，则 $X_F^+ \subseteq X_{G^+}^+$ ，故 $Y \in X_{G^+}^+$ ，则 $X \rightarrow Y \in (G^+)^+ = G^+$ ，综上所述有 $F^+ \subseteq G^+$ 。

同理可证 $G^+ \subseteq F^+$ ，即 $F^+ = G^+$ 。



6.3 数据依赖的公理系统(最小函数依赖集)

意义：给出了两个函数依赖集等价的判定方法。

* 定义：如果函数依赖集F满足下列条件，则称F为一个**极小函数依赖集**。亦称为**最小依赖集**或**最小覆盖**。

(1) F中任一函数依赖的右部仅含有一个属性；

(2) F中不存在这样的函数依赖 $X \rightarrow A$ ，使得F与 $F - \{X \rightarrow A\}$ 等价；
(去除多余的函数依赖)

(3) F中不存在这样的函数依赖 $X \rightarrow A$ ，X有真子集Z使得 $(F - \{X \rightarrow A\}) \cup \{Z \rightarrow A\}$ 与F等价。 (去除左部的冗余属性)

* 最小函数依赖集求解算法：

(1) 对F中每一函数依赖 $X \rightarrow Y$ ，若 $Y = A_1 A_2 \dots A_m (m \geq 2)$ ，则用 $\{X \rightarrow A_i \mid i = 1, \dots, m\}$ 替换 $X \rightarrow Y$ ； (等价变换)

(2) 对F中每一函数依赖 $X \rightarrow A$ ，若 $X = B_1 B_2 \dots B_n$ ，逐一考察 B_i ，若 $A \in (X - B_i)_F^+$ ，则用 $(X - B_i) \rightarrow A$ 替换 $X \rightarrow A$ ， B_i 称为无关属性； (等价变换)

(3) 对于F中的每一函数依赖 $X \rightarrow A$ ，若 $A \in X_{F - \{X \rightarrow A\}}^+$ ，则从F中去掉 $X \rightarrow A$ 。 (等价变换)



6.3 数据依赖的公理系统(最小函数依赖集)

* **定理：** 每一函数依赖集F均与其对应的最小函数依赖集 F_{\min} 等价。(构造性证明，在构造 F_{\min} 的过程中每一步变换都是等价的)

例： 设关系模式R(ABCDE) 上的函数依赖集 $F = \{A \rightarrow BC, BCD \rightarrow E, B \rightarrow D, A \rightarrow D, E \rightarrow A\}$ ，求F的最小函数依赖集。

解： ① 对每个函数依赖右部属性分离，得：

$$F_1 = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, BCD \rightarrow E, B \rightarrow D, A \rightarrow D, E \rightarrow A\}$$

② 去掉左部冗余属性

$\because (BC)^+ = BCDEA$ ，包含E， $BCD \rightarrow E$ 中的D为冗余属性，以 $BC \rightarrow E$ 取代 $BCD \rightarrow E$ ，得：

$$F_2 = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, BC \rightarrow E, B \rightarrow D, A \rightarrow D, E \rightarrow A\}$$

③ 去掉多余函数依赖

$\because A \rightarrow B, B \rightarrow D$ 可以得到 $A \rightarrow D$ ，故 $A \rightarrow D$ 多余，去掉，得 $F_{\min} = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, BC \rightarrow E, B \rightarrow D, E \rightarrow A\}$



6.3 数据依赖的公理系统(最小函数依赖集)

* 结论：一个给定的函数依赖集F的最小函数依赖集不是唯一的。

原因：在求解过程中由于考察FD的次序的不同会产生不同的结果，但一个函数依赖集F的所有最小函数依赖集是等价的（都等价于F）。

例： $F = \{ A \rightarrow B, B \rightarrow A, B \rightarrow C, A \rightarrow C, C \rightarrow A \}$

F_{m1} 、 F_{m2} 都是F的最小依赖集：

$$F_{m1} = \{ A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A \}$$

$$F_{m2} = \{ A \rightarrow B, B \rightarrow A, A \rightarrow C, C \rightarrow A \}$$