鲁東大學
LUDONG UNIVERSITY

数学分析2

第九章 定积分

§9.3 可积的条件

——数学本1801、1802

主讲教师：宋美

判别一个函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否可积,就是判别极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 是否存在.在实际应用中,直接按定义来判定是困难的.我们希望由函数本身的性质（例如函数的有界性、连续性等）来判别函数的可积性.为此,先给出可积准则,并以此证明有界性是可积的必要条件而非充分条件,连续性是可积的充分条件而非必要条件.

一、可积的必要条件——可积必有界

定理9.1 （可积必有界）

若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上必有界.

证 设

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = J$$

由定义，对 $\varepsilon = 1 > 0, \exists \delta > 0,$ 只要 $\|T\| < \delta,$ 无论 T

与 $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 如何选取，都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J \right| < 1,$$

于是

一、可积的必要条件——可积必有界

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le |J| + 1 = M.$$

倘若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则必有 k，使得 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上无界．令

$$G = \left|\sum_{i \ne k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|,$$

故必存在 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，满足

$$|f(\xi_k)| > \frac{M + G}{\Delta x_k}.$$

一、可积的必要条件——可积必有界

于是 $$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$\geq \left| f(\xi_k)\Delta x_k \right| - \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$> \frac{M+G}{\Delta x_k}\Delta x_k - G = M,$$

矛盾.

以下例子告诉我们, 有界性并不是可积的充分条件.

狄利克雷函数在任何闭区间上不可积

例1 证明: 狄利克雷函数 $D(x)$ 在任何 $[a, b]$ 上不可积.

证 取 $[a, b]$ 的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

现任取 $\xi_i \in \mathbb{Q} \cap [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

又任取 $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D(\eta_i)\Delta x_i = 0.$$

从而，狄利克雷函数 $D(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积.

二、可积的充要条件

定义2 设 f 在 $[a,b]$ 上有界，对任意分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

设第 i 个小区间为Δ_i，区间长度记为 Δx_i，记

$$M_i = \sup\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},\ i = 1, 2, \cdots n;$$

$$m_i = \inf\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},\ i = 1, 2, \cdots n;$$

显然，对 $\forall \xi_i \in \Delta x_i$，

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = m \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

二、可积的充要条件

称

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\ \ s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

分别为 f 关于分割 T 的上和和下和。显然

$$s(T)\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T)$$

注：随着分割越来越细，上和不增，下和不减。

画图板书原因

二、可积的充要条件

称 $\omega_i = M_i - m_i \ (i = 1, 2, \cdots n)$ 为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅。

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x') - f(x'')|$$

振幅反映了函数在区间内的变化范围, 是一个与连续性相关联的概念.

二、可积的充要条件——可积准则

定理9.3（可积准则） 函数 f 在$[a, b]$上可积的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists$分割 T ,使

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

几何上看：若函数 f 在$[a, b]$上可积，则包围曲线的一系列小矩形的面积之和可达到任意小。

f 在$[a, b]$上可积 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$当$\|T\| < \delta$时，有

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

常见的有三种方法, 下面分别作出介绍.

第一种方法: 每个 $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ ，从而

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon.$$

第二种方法: 若 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ 有界, 即 $\exists M$, 对任意分割,

$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \le M$, 则当 $\|T\| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i \le \|T\|\sum_{i=1}^{n}\omega_i < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon.$$

第三种方法：若 $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i' \Delta x_i' + \sum \omega_i'' \Delta x_i''$,

在 $\sum \omega_i' \Delta x_i'$ 中， $\omega_i' < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

而在 $\sum \omega_i'' \Delta x_i''$ 中， $\sum \Delta x_i'' < \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$,

其中 $M-m$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的振幅, 从而

$$\omega_i \le M-m, i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i' \Delta x_i' + \sum \omega_i'' \Delta x_i''$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2(M-m)}(M-m) = \varepsilon.$$

三、可积的充分条件——连续必可积

常见的有三种方法, 下面分别作出介绍.

第一种方法: 每个 $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$， 从而

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon.$$

定理9.4（连续必可积）

若 f 在 $[a,b]$ 上 连续，则 f 在 $[a,b]$ 上 可积.

证 f 在 $[a,b]$ 上连续, 从而在 $[a,b]$ 上 一致连续. 于

三、可积的充分条件——连续必可积

是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [a,b]$, 若 $|x' - x''| < \delta$, 则

$$\left| f(x') - f(x'') \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

因此当 $[a,b]$ 上的分割 T 满足 $\|T\| < \delta$ 时,

$$\omega_i = M_i - m_i$$

$$= \sup\{ \left| f(x') - f(x'') \right|, \ x', x'' \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\le \frac{\varepsilon}{b-a},$$

从而 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$

第二种方法: 若 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ 有界, 即 $\exists\, M$, 对任意分割,

$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \le M$, 则当 $\|T\| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i \le \|T\|\sum_{i=1}^{n}\omega_i < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon.$$

例如, f 在 $[a,b]$ 上单调时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \le \left|f(b)-f(a)\right|,$$

从而可证 f 在 $[a,b]$ 上可积.

三、可积的充分条件——单调必可积

定理9.5（单调必可积）

若 f 是 $[a, b]$ 上的单调函数, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

证 不妨设 f 是非常值的增函数，则对任意分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

$$\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1}),\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

于是 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i = \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = f(b) - f(a).$

因此, 若 $\|T\| < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i \le \|T\|\cdot\sum_{i=1}^{n}\omega_i$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\big(f(b)-f(a)\big)=\varepsilon.$$

第三种方法：若 $\sum\omega_i\Delta x_i = \sum\omega_i'\Delta x_i' + \sum\omega_i''\Delta x_i''$,

在 $\sum\omega_i'\Delta x_i'$ 中，

$$\omega_i' < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

而在 $\sum\omega_i''\Delta x_i''$ 中，

$$\sum\Delta x_i'' < \frac{\varepsilon}{2(M-m)},$$

其中 $M-m$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的振幅, 从而

$$\omega_i \le M-m,\ i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i' \Delta x_i' + \sum \omega_i'' \Delta x_i''$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2(M-m)}(M-m)$$

$$= \varepsilon.$$

三、可积的充分条件——有限个间断点的有界函数必可积

若 f 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限多个不连续点, 此时可用第三种方法证明 f 可积.

定理9.6（有限个间断点的有界函数必可积）

若 f 在 $[a, b]$ 上有界，且只有有限多个间断点，则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

证 不妨设 f 在 $[a, b]$ 上只有一个间断点, 且为 b. $\forall \varepsilon > 0$, 取 δ' 满足

$$0 < \delta' < \frac{\varepsilon}{2(M - m)} < (b - a).$$

其中 M 与 m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的上确界与下确界. 设 f 在 $[b-\delta',b]$ 上的振幅为 ω',则

$$\omega'\delta' \le (M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 f 在 $[a,b-\delta']$ 上连续, 则存在分割

$$T': a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}=b-\delta',$$

使

$$\sum_{T'}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, 则

$$\sum_{T} \omega_i \Delta x_i = \sum_{T'} \omega_i \Delta x_i + \omega' \delta'$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由可积准则, f 在 $[a,b]$ 上可积.

例2 证明黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\ x=\dfrac{p}{q}\ \ (\,p,q\text{ 互素}\,),\\[2ex] 0,\ x=0,1\text{ 及 }(0,1)\text{ 中的无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可积, 且 $\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

证 $\forall \varepsilon > 0$,在 $[0,1]$ 中满足 $\dfrac{1}{q} > \dfrac{\varepsilon}{2}$ 的有理数 $r = \dfrac{p}{q}$ 只有有限多个, 设它们为 $\{r_1,\ r_2,\cdots,r_k\}$. 对 $[0,1]$ 作分割

$$T: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1,$$

使 $\|T\| < \dfrac{\varepsilon}{2k}$. T 中含 $\{r_1,\ r_2,\cdots,r_k\}$ 的小区间至多有 $2k$ 个, 记为 $\{\Delta_i'\}$. 因此这些小区间长度之和为

$$\sum \Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{2k} \cdot 2k = \varepsilon.$$

T中不含$\{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$的区间记为$\{\Delta_i''\}$. 由于在$\Delta_i''$上$0 \le R(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是$\omega_i'' \le \frac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i' \Delta x_i' + \sum \omega_i'' \Delta x_i''$$

$$< \frac{1}{2} \sum \Delta x_i' + \frac{\varepsilon}{2} \sum \Delta x_i''$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了 $R(x)$ 的可积性.

由于已证得 $R(x)$ 可积, 而且无理数具有稠密性,

因此可取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 皆为无理数,

从而

$$\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

复习思考题

1. $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有界函数, 其不连续点的集合为 E_0. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists [a_k, b_k] \subset [a, b], k = 0,1,\cdots,n$, 使

$$E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left[a_i, b_i\right], \text{ 且 } \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \varepsilon .$$

求证 f 在$[a, b]$上可积.

2. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不连续点的集合为 E_0, 它们在 $[a, b]$ 中稠密, 即 $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $[\alpha, \beta] \cap E_0 \neq \varnothing$.

试问 f 在 $[a, b]$ 上是否一定不可积?

狄利克雷函数在任何闭区间上不可积

例1 证明:狄利克雷函数 $D(x)$ 在任何 $[a, b]$ 上不可积.

证 若 $D(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $\exists J \in \mathbf{R}$, $\exists \delta > 0$,

当 $\|T\| < \delta$ 时，对任何 $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$, 有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i - J \right| < \frac{1}{2}.$$

现任取 $\xi_i \in \mathbf{Q} \cap [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

又任取 $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D(\eta_i)\Delta x_i = 0.$$

于是 $\left|\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} D(\eta_i)\Delta x_i\right| = 1$, 而这与

$$\left|\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} D(\eta_i)\Delta x_i\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i - J\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} D(\eta_i)\Delta x_i - J\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

相矛盾, 所以 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.