山东科技大学 2019 年全国硕士学位研究生招生考试

高等代数试卷

一、证明题（10 分）证明：如果 $(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$，那么 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$.

二、计算题（10分）计算 n 级行列式：
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

三、证明题（10 分）设 σ 是欧式空间 V 的一个变换，对任意的 $\alpha, \beta \in V$，有 $(\sigma\alpha, \sigma\beta) = (\alpha, \beta)$. 证明：1. σ 是线性变换；2. 是正交变换.

四、证明题（10 分）已知矩阵 $A_{3\times2}$，$B_{2\times3}$，且 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，证明 $r(A) = r(B) = 2$.

五、证明题（10 分）设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵. 证明：
$$\lambda^n |\lambda E_m - BA| = \lambda^m |\lambda E_n - AB|.$$

六、证明题（10 分）判定 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$ 是否正定？

七、证明题（10 分）设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，但不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 线性表示. 证明：α_r 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 线性表示.

八、证明题（10 分）设 A，B 为 n 阶实方阵，已知 A，B，$A-B$ 都是正定矩阵.

证明：$B^{-1} - A^{-1}$ 是正定矩阵.

九、证明题（10 分）设σ是实数域R上n维线性空间V的线性变换，$\lambda \in R$. 证明:

1. V的子集$\overline{W}=\{\alpha \in V \mid (\sigma-\lambda)^n \alpha=0\}$是$V$的子空间; 2. $\overline{W}$为σ不变子空间.

十、证明题（20 分）

1. 设α, β是欧氏空间(标准内积)R^n中的单位列向量, $A=\alpha\beta^T$，且 $\alpha+\beta \neq 0$,

证明: α是A的一个特征向量;

2. 设$A,B,C,D \in P^{n\times n}$， 对$\forall X \in P^{n\times n}$ ，令$\sigma(X)=ABX+CX+XD$,

证明: σ是 上的线性变换.

十一、综合题（20 分）在$P[x]_n$中，多项式$f_i=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\ldots(x-\alpha_n)$

($i=1,2,\ldots,n$), 其中$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是互不相同的数.

1. 证明：$f_1,f_2,\ldots,f_n$是一组基;

2. 在 1. 中，令$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是全体$n$次单位根，求由基$1,x,x^2,\ldots,x^{n-1}$到基

$f_1,f_2,\ldots,f_n$的过渡矩阵。

十二、证明题（20 分）设M是n维欧氏空间 (所有形如$x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$,

$y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$的实向量所构成的实线性空间)的一个非空子集. M上内积

为$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$. 令$M^{\perp}=\{x\in R^n \mid \langle x,y\rangle=0,\ \forall y\in M\}$.

1. 证明: $M^{\perp}$是R^n的一个子空间;

2. 证明: 若M为 的一个线性子空间, 则 可表示为M与$M^{\perp}$的直和. 即

$R^n=M\oplus M^{\perp}$.