2017 年上海海事大学攻读硕士学位研究生入学考试试题

（**重要提示**：答案必须做在答题纸上，做在试题上不给分）

考试科目代码 831 考试科目名称 高等代数

一、选择填空（从 4 个备选答案中选择一项正确的，将相应字母填写在答题纸上。每小题 5 分，共 60 分）

1. 在 $F[x]$里能整除任意多项式的多项式是（　　　　）。

A. 零多项式　　B. 零次多项式　　C. 本原多项式　　D. 不可约多项式

2. 行列式$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & a \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}$中，元素 a 的代数余子式是（　　　　）。

A. $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$　　C. $-\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$　　D. $-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

3. 设 M 是 4 阶方阵，$|M| = -3$，则$|-2M^2| =$（　　　　）。

A. 18　　B. −18　　C. 144　　D. −144

4. 设 M, N 均为 n 阶矩阵，则以下结论正确的是（　　　　）。

A. $|M+N|=|M|+|N|$　　B. $|MN|=|NM|$

C. $MN=NM$　　D. $(M-N)^2=M^2-2MN+N^2$

5. 要使矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & t \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$的秩最小，则 $t =$（　　　　）。

A. 2　　B. −2　　C. 3　　D. −3

6. 设α_1, α_2是 n 维向量，令

$$\beta_1 = 2\alpha_2 - \alpha_1，\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2，\ \beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2，$$

则向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$（　　　　）。

A. 线性相关　　B. 线性无关　　C. 可互相线性表示　　D. 不能确定相关性

7. 设 M, N 为 n 阶方阵，则（　　　　　　）。

A．M, N 可逆，则 $M+N$ 可逆

B．M, N 不可逆，则 $M+N$ 不可逆

C．M 可逆，N 不可逆，则 $M+N$ 不可逆

D．M 可逆，N 不可逆，则 MN 不可逆

8．下列集合中，是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间的是（　　　　），其中 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$

A. $\{\alpha \mid x_3 \ge 0\}$　　　　B. $\{\alpha \mid x_1+2x_2+3x_3=0\}$

C. $\{\alpha \mid x_3 = 1\}$　　　　D. $\{\alpha \mid x_1+2x_2+3x_3=1\}$

9. n 阶方阵 M 具有 n 个不同的特征值是 M 与对角阵相似的（　　　　）。

A. 充要条件　　　　B. 充分而非必要条件

C. 必要而非充分条件　　　　D. 既非充分也非必要条件

10. 实 2 维向量空间 $\mathbf{R}^2$ 中对任意两个向量 $\alpha=(a_1,a_2)$，$\beta=(b_1,b_2)$，定义运算

$$a \circ b=(a_1+a_2)(b_1+b_2)\,.$$

则该运算（　　　　）$\mathbf{R}^2$ 上的一个内积。

A. 构成　　B. 一定条件下可以构成　　C. 不能构成　　D. 以上选项都不对

11．设α, β是相互正交的 n 维实向量，则下列各式中错误的是（　　　　）。

A. $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$　　　　B. $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$

C. $|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$　　　　D. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

12. 当实数 t 满足条件（　　　　）时，二次型 $x_1^2+x_2^2+2tx_1x_2$ 是正定的。

A. $t<-1$　　B. $t>1$　　C. $-1<t<1$　　D. $t=1$ 或 $t=-1$

二、计算题（其中 1、2 小题每题 15 分，3、4 小题每题 20 分，共 70 分）

1.（15 分）求方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7 \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9 \\ \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11 \end{cases}$$

通解（根据λ的不同取值范围分别进行讨论）。

2.（15分）已知向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-6\\6\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\\-9\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\7\end{bmatrix}.$$

求线性子空间$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的维数与一个基。

3.（20分）已知σ是线性空间V上的线性变换，σ关于V的基的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}.$$

求矩阵T使A可对角化.

4.（20 分）求一个正交变换把下列二次型化成标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

三、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1.（10分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s+1}$是$s+1$个向量，$\alpha_{s+1}\neq 0$. 而向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$满足以下条件

$$\beta_i=\alpha_i+t\alpha_{s+1}, t\in R;\text{且对于任意}t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\text{线性无关。}$$

求证向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s+1}$也线性无关。

2.（10分）设A为实$m\times n$矩阵，试证A^TA与A有相同的秩，即 $r(A^TA)=r(A)$.