2018 年上海海事大学攻读硕士学位研究生入学考试试题

（**重要提示**：答案必须做在答题纸上，做在试题上不给分）

考试科目代码 831 考试科目名称 高等代数

一、填空题（每小题 5 分，共 60 分，其中第 10~12 小题应填“真”或“假”）

1. 当 a=（　　　　　　）时多项式 $f(x)=x^2+ax$ 与 $g(x)=x^2+4x+a$ 有公共根。

2. 若数域 P 上的一元多项式 $f(x)$与$g(x)$ 互素，即 $(f(x),g(x))=1$. 则

$$(f(x),\ f(x)+g(x)) = (\qquad\qquad\qquad).$$

3. 当λ=（　　　　　　）时，下述齐次线性方程组有非零解：

$$\begin{cases}\lambda x_1+2x_2+2x_3+2x_4=0\\2x_1+\lambda x_2+2x_3+2x_4=0\\2x_1+2x_2+\lambda x_3+2x_4=0\\2x_1+2x_2+2x_3+\lambda x_4=0\end{cases}$$

4. 当 k=（　　　　　　）时，以下向量组线性相关：

$$\alpha_1=(1,1,1,3),\alpha_2=(-1,-3,5,1),\alpha_3=(3,2,-1,k),\alpha_4=(-2,-6,10,k).$$

5. 设矩阵 A 和 B 分别是 2×3 和 3×3 的矩阵，秩(A)=2，秩(B)=3，则 A 与 B 的乘积 AB 的秩是（　　　　　　）。

6. 方阵 A 和 B 满足 $A=\frac{1}{2}(B+E)$, $A^2=A$, 这里 E 为单位矩阵。则 B^2=(　　　　　　)。

7. 三阶矩阵 A 的特征根为－1，2，4，则 A 的行列式$|A|$ =（　　　　　）。

8. 设 V_1，V_2 都是线性空间 V 的子空间，$V_1\subseteq V_2$，且 V_1 与 V_2 有相同的维数，则（　　　　　　　　）。

9. 设 A 是 3 维欧氏空间 R^3 的线性变换：

$$A(x,y,z)=(x+y,x-z,z),\ \forall(x,y,z)\in R^3.$$

则 A 在基 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$ 下的矩阵为(　　　　　　　　)。

10. 以下命题为（　　　　　）：若方阵 A, B, C 满足 $AB=AC$，则 $B=C$.

11. 以下结论为（　　　　）：

每一个 n 维线性空间都可以表示为 n 个一维线性空间的直和。

12. 以下论断为（　　　　）：若λ是正交矩阵 A 的特征根，则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 也是 A 的特征根。

二、计算题（1、3 小题各 17 分，2、4 小题各 18 分，共 70 分）

1. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & y & y & \cdots & y \\ y & a_2 & y & \cdots & y \\ y & y & a_3 & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (y\neq a_i, i=1,2,\dots,n)$$

2. λ取何值时，以下线性方程组有惟一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时，求通解（用向量形式表示）：

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4 \\ -x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$$

3. 设 W 是 $R^{2\times 2}$ 中由矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

生成的子空间，求 W 的基与维数。

4. 求一正交线性变换，将以下二次型化为标准型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3.$$

三、证明题（选做 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 A 与 B 是 $m\times n$ 矩阵，证明：

$$秩(A+B)\leq 秩(A)+秩(B).$$

2. 设 A 是线性空间 V 上的线性变换，$A^{k-1}(\xi)\neq\mathbf{0}$ 而 $A^k(\xi)=\mathbf{0}$，这里 $k>0$。证明：

$\xi, A(\xi), \dots, A^{k-1}(\xi)$ 线性无关。

3. 设 A 为 n 阶复矩阵，其秩为 $r(A)=r$ 且 $A^2=A$. 证明：

(1) A 相似于一个对角矩阵。

(2) $|A+E|=2^r$ 。