山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目名称：数学分析　　　　　　　　　　试题编号：821

注意事项：1．本试卷共 4 道大题（共计 16 个小题），满分 150 分；

2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

4．是否允许使用普通计算器＿＿否＿＿。

* *

一、简答题（本题共 2 道小题，每小题 5 分，共 10 分）

1．$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中一个是收敛数列，另一个是发散数列，试举例说明$\{a_nb_n\}$是否必为发散数列.

2．你所学过的微积分学基本定理有哪些?

二、计算题（本题共 7 道小题，每小题 10 分，共 70 分）

1．试求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n-1}\right)$.

2．试求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

3．求函数$f(x,y)=x+y$在条件$x^2+y^2=1$下的极值.

4．求全微分$(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$的一个原函数.

5．求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n$的收敛域与和函数.

6．设$z=f(xy,x+y)$，其中f有连续的二阶偏导数，求dz，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7．求圆锥$z=\sqrt{x^2+y^2}$在圆柱体$x^2+y^2\le 2x$内那一部分的面积.

三、判断讨论题（本题共 3 道小题，每小题 10 分，共 30 分）

1．判断函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

在（0，0）点的可微性.

2．讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}$ 是绝对收敛，条件收敛还是发散，其中 $a>0$．

3．设 $u_n(x)=\dfrac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内是否一致收敛，并讨论其和函数的可微性.

四、证明题（本题共 4 道小题，每小题 10 分，共 40 分）

1．设函数 $f(x)=x^{16}-x-1$, 试证明该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有2个实根.

2. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，若对所有 x，有 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，证明 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必能取到最大值.

3．设 $a\in(0,1)$，证明含参量积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x^2}{x^y}dx$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛.

4．设 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，在 $\operatorname{int}D$（D 的内部）内有连续的二阶偏导数，且满足

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)>0，\ (x,y)\in\operatorname{int}D.$$

证明：若在 ∂D（D 的边界）上有 $f(x,y)\equiv 0$，则

$$f(x,y)\le 0，\ (x,y)\in\operatorname{int}D.$$