山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

（2018年）

考试科目名称：数学分析　　　　　　试题编号：823

注意事项：1．本试卷共4道大题（共计16个小题），满分150分；

2．本卷属试题卷，答题另有答题纸，答案一律写在答题纸上，写在该试题卷上或草稿纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．是否允许使用普通计算器＿＿否＿＿＿。

* *

一、简答题（共2小题，每题5分，共10分）

1.　叙述带有拉格朗日型余项的泰勒定理.

2.　试举例说明无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛不是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 的充分必要条件.

二、计算题（本题共7个小题，每题10分，共70分）

1.　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)$.

2.　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$.

3.　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数且 $\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=0,\ f(x)$ 为连续函数，求常数 a 及 $f'(x)$.

4.　计算 $\int_0^1\int_1^x \dfrac{\ln(t+1)}{t\sqrt{x}}dtdx$.

5.　求函数 $y=f(x)=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间，极值及曲线的渐近线.

6. 计算曲线积分 $I=\int_L (x+e^{\sin y})dy-(y-\frac{1}{2})dx$，其中 L 是位于第一象限中的直线段 $x+y=1$ 与位于第二象限中的圆弧 $x^2+y^2=1$ 构成的曲线，其方向是由 $A(1,0)$ 到 $B(0,1)$ 再到 $C(-1,0)$.

7. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$ 的上侧为正侧.

三、判断讨论题（本题共 3 个小题，每小题 10 分，共 30 分）

1. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$（$p$ 为实数）是绝对收敛，条件收敛还是发散.

2. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性，偏导数的存在性及偏导数的连续性.

3. 试确定函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 的收敛域，并讨论其和函数 $f(x)$ 的连续性.

四、证明题（本题共 4 个小题，每题 10 分，共 40 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，且 $f(a)=f(b)=0$，则 $\max\limits_{a\leq x\leq b}|f'(x)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|dx$.

2. 证明：若 $\Delta u(x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$S$ 为包含区域 V 的曲面的外侧，则

$$\iiint\limits_V \Delta u dxdydz=\oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS,$$

其中 u 在 V 及其界面 S 上有二阶的连续偏导数，$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 为曲面 S 外法线方向的方向导数。

3. 若$f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$在区间$[a,b]$ 上可积且$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$ 上都可积，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|^2dx=0$，

设 $h(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt$， $h_n(x)=\int_a^x f_n(t)g(t)dt$， 则在区间$[a,b]$上$h_n(x)$一致收敛于$h(x)$.

4. 设$f(t)$ 在区间$[1,2]$上可积， D是由曲线$xy=1$，$xy=2$， $y=x$，$y=4x$所围成的区域在第一象限中的部分.

证明： $\iint\limits_D f(\sqrt{xy})d\sigma=(\ln 2)\int_1^2 f(\sqrt{t})dt$.