山东师范大学
硕士研究生入学考试试题
(2015年)

考试科目名称：量子力学　　　　　　　　试题编号：822

注意事项：1．本试卷共 3 道大题（共计 16 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4．是否允许使用普通计算器＿＿＿＿＿＿。

* *

一、简述题（8 题，每题 5 分，共 40 分）

1. 试以电子的运动为例解释微观粒子的波粒二象性。

2. $\psi(x)=\delta(x)$是否定态？为什么？

3. 试述守恒量的概念及其性质。

4. 试给出氢原子的能级简并度并与一般中心力场中运动粒子的能级简并度进行比较。

5. 以α和β分别表示自旋向上和自旋向下的归一化波函数，写出两电子体系的自旋单态和自旋三重态波函数（只写自旋部分波函数）。

6. 是否能用可见光产生 1 阿秒(10^{-18}s) 的激光短脉冲，利用能量—时间测不准关系说明原因。

7. 试给出两个自旋为 1/2 的全同粒子发生散射（散射角分别为$\theta,\pi-\theta$）时的反向极化散射截面表达式。

8. 试求出完全简并费米气体中电子的平均能量（用费米能量E_f表示）。

二、证明题（4 题，每题 10 分，共 40 分）

1. 对于δ势垒，$V(x)=\gamma\delta(x)$，试证δ势中$\psi'(x)$的跃变条件。

2. 试证明：任一力学量算符在以自己的本征矢为基矢的表象中的表示为对角矩阵。

3. 证明在氢原子的任何定态$\psi_{nlm}(\boldsymbol{r},\theta,\varphi)$中，动能的平均值等于该定态能量的负值，即$<\hat{\boldsymbol{p}}^2/2\mu>_{nlm}=-\boldsymbol{E}_n$。

4. 设有两个电子，自旋态分别为 $\chi=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\end{pmatrix}$。证明两个电子处于自旋单态（S=0）的几率是 $\omega_a=\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$。

三、计算题（4 题，共 70 分）

1.（20 分）质量为 μ 电荷为 q 的粒子在均匀磁场 $\vec{B}=B\vec{k}$ 中运动。求定态能量和波函数。

（提示：可取电磁场的矢势为 $\vec{A}=(-By,0,0)$）

2.（20 分）已知 $t=0$ 时，氢原子的波函数为 $\Psi(\vec{r},s_z,t=0)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\psi_{100}(\vec{r})\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\psi_{211}(\vec{r})\end{pmatrix}$，其中 $\psi_{nlm}(\vec{r})=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 满足归一化条件 $\int|\psi_{nlm}(\vec{r})|^2\,\mathrm{d}^3r=1$。试

（1）写出任意 t 时刻的波函数 $\Psi(\vec{r},s_z,t)$；

（2）求能量 E、轨道角动量 L^2 和 $\hat{L}_z$、自旋 $\hat{S}_z$ 的可能取值和相应的几率以及平均值；

（3）计算 t 时刻自旋分量 $\hat{S}_x$ 的平均值 $\overline{S}_x$。

3.（15 分）质量为 m 的粒子在势场 $V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ Cx^2, & x>0\end{cases}$ $(C>0)$ 中运动。

（1） 用变分法估算粒子基态能量，试探波函数取 $\psi(x)=Axe^{-\lambda x}$，λ 为变分参量。

（2） 它是解的上限，还是下限？将它同精确解比较。

（附：积分公式 $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\mathrm{d}x=\dfrac{n!}{a^{n+1}}$）

4.（15 分）试用玻恩近似公式计算库仑散射的微分截面 $\sigma(\theta)$，已知库仑势为 $V(r)=\dfrac{\alpha}{r}$，入射粒子质量为 μ，速度为 v，α 为实数。

（附：积分公式：$\int_0^\infty \sin qr\,\mathrm{d}r=\dfrac{1}{q}$）