考虑轮廓间一阶自相关的二项响应轮廓控制图

商艳芬, 李 振, 何曙光
(天津大学管理与经济学部, 天津 300072)

摘要: 轮廓数据是一类广泛存在于复杂制造过程中的质量数据类型. 针对轮廓间存在一阶自相关的情形, 本文通过引入广义线性混合模型用来描述轮廓间的相关性, 进而通过转化得到了独立轮廓数据的模型, 并设计了详细的参数估计方法及步骤. 在此基础上, 提出了一种基于似然比统计量的简单的休哈特类型控制图. 同时, 针对休哈特类型控制图对于小偏移不敏感的问题, 构建了基于标准化似然比统计量的累积和控制图. 仿真结果表明, 无论是本文所提出的休哈特类型控制图还是累积和控制图都具有较好的性能, 而累积和控制图整体上优于休哈特类型控制图.

关键词: 二项响应; 广义线性混合模型; 轮廓间自相关; 似然比统计量; 累积和控制图; 轮廓监控
中图分类号: TP206.3 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2020)01−0024−09
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2020.01.003

Control charts for profiles with binary data in the presence of between-profile first-order autocorrelation

Shang Yanfen, Li Zhen, He Shuguang
(College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Profile data exists in a lot of complicated manufacturing processes. Considering the first-order autocorrelation between profiles, the generalized linear mixed model (GLMM) is used to express the autocorrelations between profiles. Furthermore, the profiles are transformed into independent ones based on the GLMM model and related parameter estimation methods with step-by-step procedures are designed. Then, a Shewhart-type control chart based on likelihood ratio statistics is proposed to monitor the shifts in processes with first-order auto-correlated profile data. Considering the insensitiveness to small shifts in Shewhart-type control charts, a cumulative sum (CUSUM) control chart is also proposed based on the standardized likelihood ratio statistics. Simulation results show that both the Shewhart-type control chart and the CUSUM chart proposed in this paper can be used to detect shifts in a process. Moreover, the CUSUM chart generally outperforms the Shewhart-type control chart.

Key words: binary outputs; generalized linear mixed model; between-profile autocorrelation; likelihood ratio statistics; CUSUM control chart; profile monitoring

收稿日期: 2017–07–18; 修订日期: 2019–11–12.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71672122; 71532008; 71872123).

1 引　言

统计过程控制(statistical process control, SPC)方法作为过程质量监控工具, 在制造业以及服务业中得到了广泛关注. 传统的控制图可以对于独立的一元或者多元质量特性进行监控, 然而由于数据采集的频率较高等原因, 可能会使得采集的数据存在自相关现象, 导致数据的独立性假设难以近似满足. 对于不满足独立性假设的数据, 传统控制图的性能会受到严重影响, 其统计受控状态的平均链长(ARL) 会比没有自相关时更短, 即误报警率(false alarm rate) 虚高 [1,2]. 如何为自相关数据建立合适的控制图, 是统计过程控制面临的重要课题. 1991年Montgomery等 [3] 给出了几种一元过程中处理自相关数据的SPC 方法, 基于原始数据建立自相关结构模型对残差进行控制, 解决了存在一元单变量连续数据存在自相关时的控制问题. 在此基础上, 2006年杨穆尔等 [4] 和2007年孙静等 [1]分别针对二元和多元过程提出了T^2控制图, 将SPC自相关问题扩展到了高维数据. 2012年马义忠等 [5]研究了多变量自相关过程协方差矩阵的质量控制问题, 并基于残差构造了一种多变量指数加权移动平均(MEWMA) 控制图.

除了一元或多元质量特性, 在实际过程中, 某些产品或过程的质量特性需要用函数关系来表示, 比如产品故障率与使用时间的关系, 这种响应变量和解释变量之间的函数关系被称为轮廓(profile) [6], 轮廓控制是对质量特性为轮廓的过程进行异常监控及诊断. 近年来, 关于轮廓控制的研究已经得到了迅速发展. 与一元或多元质量特性类似, 在实际情况中, 轮廓数据也可能存在相关性, 比如2008年Noorossana 等 [7]提到的汽车喷漆厚度数据, 汽车喷漆厚度与位置有函数关系, 同时前一阶段的喷漆厚度会影响下一阶段的喷漆厚度, 此类数据被视为存在自相关的轮廓数据. 针对轮廓自相关问题, 现有的研究分为两个方向: 自相关计量型响应轮廓控制和自相关离散型响应轮廓控制. 近年来, 存在自相关的计量型轮廓控制问题在相关文献中得到了充分研究. 其中一类是轮廓内自相关问题, 2009年Soleimani等 [8]通过利用AR(1)模型消除简单线性轮廓内自相关数据的自相关性, 提出了T^2和EWMA两种控制图分别对模型参数和残差进行监控. 2014年Zhang等 [9]基于高斯过程模型(Gaussian process model)提出两种多变量休哈特控制图, 分别监控线性趋势项和轮廓内自相关项. 另一类是轮廓间自相关问题, 2016年Khedmati等 [10]通过构建U统计量消除轮廓间的数据自相关性, 再基于U统计量建立了T^2控制图. 相对于自相关计量型响应轮廓, 自相关离散型响应轮廓控制的研究广度和深度都存在很大差距 [11]. 2011年Koosha等 [12]研究了计数型轮廓内存在自相关的问题, 通过采取修正控制上限和引入广义线性混合模型两种措施降低自相关性的影响, 提出一种适用的T^2控制图. 对于响应变量为离散型数据且轮廓间存在自相关的轮廓控制问题, 目前尚未发现相关文献. 然而, 这类问题在实际中是存在的, 比如晶片上不同位置的缺陷数可以用轮廓表示, 同时相邻晶片样本上的缺陷分布可能存在自相关. 为此, 本文针对存在一阶自相关的二项响应轮廓数据的监控问题进行了方法上的探究, 研究内容主要包括:

1)通过模型转换减弱数据的自相关性.

2)基于修正后的逻辑回归模型, 提出统计量为似然比的休哈特类型控制图.

3) 考虑到休哈特控制图对于小偏移不敏感的特性, 结合标准化似然比统计量, 提出一种累积和CUSUM控制图.

研究结论表明:

1)轮廓间自相关性增大时, 休哈特类型控制图和CUSUM控制图的性能都会降低, 但是二者相比, 后者表现更好.

2)对于模型系数发生偏移的情况, CUSUM控制图在监控中小偏移时优于休哈特类型控制图.

3)对于标准差发生偏移的情况, 无论偏移大小, CUSUM控制图都优于休哈特类型控制图.

2 广义线性混合模型的建立及参数估计

2.1 模型的建立

通常, 具有计数响应变量的轮廓可以用广义线性模型处理, 当响应变量服从二项分布时, 通常采用逻辑回归模型(logistic regression model) [11]. 在第二阶段的轮廓过程控制中, 本文考虑以下情形: 对于某质量特性, 在第i次抽样的样本轮廓中第$j, j=1,2,\ldots,n$ 个取样点取得N_{ij}个观测值, 其中每一个观测值都服从两点分布(Bernoulli distribution), 即该质量特性的取值只有合格(1) 和不合格(0), 设N_{ij}个观测值中不合格的观测值个数为y_{ij}, 更为直观的取样说明如表1所示. 显然, y_{ij}服从二项分布, 记$y_{ij} \sim \mathrm{BIN}\left(N_{ij}, \pi_{ij}\right)$, 其中$\pi_{ij}$表示第$i$个样本轮廓的第$j$个取样点产生不合格品的概率.

表 1 取样说明

Table 1 Instruction for sampling

样本轮廓编号(i)	取样点(j)			
	1	2	$\cdots$	n
1	$y_{11}\left(N_{11}\right)$	$y_{12}\left(N_{12}\right)$	$\cdots$	$y_{1n}\left(N_{1n}\right)$
2	$y_{21}\left(N_{21}\right)$	$y_{22}\left(N_{22}\right)$	$\cdots$	$y_{2n}\left(N_{2n}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

考虑轮廓间具有相关性的情况, 即后一个样本轮廓的模型参数受前一个样本轮廓模型参数的影响, 二者之间存在一定的相关性. 传统的逻辑回归模型难以表示这种相关性, 为此本文引入广义线性混合模型(generalized linear mixed model, GLMM). 其中相邻的两个样本轮廓的广义线性混合模型定义为

$$\operatorname{logit}\left(\pi_{(i-1)j}\right)=\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_{(i-1)}+\boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{(i-1)}, \tag{1}$$

$$\operatorname{logit}\left(\pi_{ij}\right)=\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_i+\boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{X}$表示固定影响矩阵, $\boldsymbol{Z}$表示随机影响矩阵, $\boldsymbol{\beta}$是模型的回归系数. 在不考虑自相关特性时, 随机影响项的系数向量$\boldsymbol{u}$通常是服从多元正态分布的p维向量 [13], 但在当前问题中$\boldsymbol{u}$中包含了轮廓间的自相关项.

自相关模型的阶数可能会受数据采集频率的影响, 本文只讨论轮廓间存在一阶自相关的问题, 设相关系数为φ, 建立一阶自相关模型如下

$$\boldsymbol{u}_i=\varphi\boldsymbol{u}_{(i-1)}+\boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_p(0,\sigma^2\boldsymbol{I}). \tag{3}$$

为消除相关性, 联合式(1), 式(2)和式(3)可得

$$\operatorname{logit}\left(\pi_{ij}\right)-\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_i=\varphi\left(\operatorname{logit}\left(\pi_{(i-1)j}\right)-\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_{(i-1)}\right)+\boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_i,$$

将上式转化为

$$\operatorname{logit}\left(\pi_{ij}'\right)=\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_i'+\boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_i, \tag{4}$$

其中 $\pi_{ij}'=\dfrac{\pi_{ij}\left(1-\pi_{(i-1)j}\right)^{\varphi}}{\pi_{ij}\left(1-\pi_{(i-1)j}\right)^{\varphi}+\left(1-\pi_{ij}\right)\pi_{(i-1)j}^{\varphi}}\in(0,1)$, $\boldsymbol{\beta}_i'=\boldsymbol{\beta}_i-\varphi\boldsymbol{\beta}_{(i-1)}$.

这种模型转化方法在自相关轮廓控制的相关文献 [8,10]中较为常用, 经过转化的广义线性模型(4) 中的随机影响项为$\boldsymbol{\varepsilon}_i$, 服从多元正态分布, 因此可认为式(4)是关于$\pi_{ij}'$和$\boldsymbol{\beta}_i'$的无相关项的GLMM.

2.2 模型参数估计

根据广义线性模型(4), 在取得第$(i-1)$和第i个样本轮廓数据之后, 可以基于似然函数得到模型参数的最大似然估计(MLE). 但在实际使用中, 常用迭代加权最小二乘(iterative weighted least square, IWLS) 估计值近似替代MLE [11,14,15]. 下面将给出用IWLS进行参数估计的方法和步骤.

2.2.1 参数估计的方法

对第i个样本轮廓, 可得关于$(\boldsymbol{\beta}_i', \boldsymbol{\varepsilon}_i)$的联合对数似然函数

$$\ell_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \ln f\left(\boldsymbol{y}_i | \boldsymbol{\varepsilon}_i\right) + \ln \phi\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i\right) \right\}, \tag{5}$$

其中 $f\left(\boldsymbol{y}_i|\boldsymbol{\varepsilon}_i\right)$是已知$\boldsymbol{\varepsilon}_i$时$\boldsymbol{y}_i$的条件概率密度函数, 其对数表达式如下

$$\ln f(\boldsymbol{y}_i|\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \sum_{j=1}^{n} \left[\ln \binom{N_{ij}}{y_{ij}} + y_{ij}\left(\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_i' + \boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_i\right) - N_{ij}\ln\left(1+\exp\left\{\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_i' + \boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_i\right\}\right) \right],$$

$\phi\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i\right)$是随机影响项$\boldsymbol{\varepsilon}_i$的概率密度函数 [13], $\boldsymbol{\varepsilon}_i$服从多元正态分布, $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$.

显然, 式(5) 中包含了第i个样本轮廓的全部样本信息. 最大化关于$(\boldsymbol{\beta}_i', \boldsymbol{\varepsilon}_i)$的联合对数似然函数, 可得出其估计值$(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i', \hat{\varepsilon}_i) = \arg\max\limits_{\boldsymbol{\beta}_i', \boldsymbol{\varepsilon}_i} \ell_i$. 接下来为简化讨论, 对于第$i$个轮廓, 省略下标符号$i$, 并假设在每个取样点的样本量固定为$N_{ij} = N$, 这在实际应用中是容易做到的. 由于需要同时估计出$(\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\varepsilon})$两个参数, 设$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\beta}'^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 最大化联合对数似然函数(5), 对其关于$\boldsymbol{\xi}$求导可得

$$\frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}, \tag{6}$$

其中$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{n\times p} & \boldsymbol{Z}_{n\times p} \\ \mathbf{0}_{p\times p} & \boldsymbol{I}_{p\times p} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}, \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1p} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{np} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \left((\boldsymbol{y}' - \hat{\boldsymbol{\mu}}')^{\mathrm{T}}, -(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$.

令$\dfrac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}$, 可得以下关于$\boldsymbol{\xi}$的IWLS方程

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}. \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2\}$, 是广义线性模型的权重矩阵, $\boldsymbol{W}_1 = N\mathrm{diag}\{\hat{\pi}_1'(1-\hat{\pi}_1'), \hat{\pi}_2'(1-\hat{\pi}_2'), \ldots, \hat{\pi}_n'(1-\hat{\pi}_n')\}$, $\boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{I}_{p\times p}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{\eta}$称为调整参数变量, $\boldsymbol{y}' = N(\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_n')^{\mathrm{T}}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}' = N(\hat{\pi}_1', \hat{\pi}_2', \ldots, \hat{\pi}_n')^{\mathrm{T}}$.

2.2.2 参数估计的步骤

第i个样本轮廓参数$\boldsymbol{\xi}_i$ (以下仍省略下标i) 的估计值可通过式(7) 的IWLS方程经过若干次迭代得到. 其迭代过程可以归纳为以下步骤.

步骤1 本文所讨论的是第二阶段控制图, 可以认为$\boldsymbol{\beta}_0$和φ是已知的, 此外$\boldsymbol{\varepsilon}$服从均值为$\mathbf{0}$的p维正态分布. 据此, 可设$\boldsymbol{\xi}$的迭代初始值为$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)} = \left((1-\varphi)\boldsymbol{\beta}_0^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$, 置当前迭代次数为$k=0$.

步骤2 第$(k+1)$次迭代时, 基于$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(k)}$计算得出$\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{(k)}$, $\boldsymbol{W}^{(k)}$, $\boldsymbol{q}^{(k)}$, 再根据式(7) 求出$\boldsymbol{\xi}$的当前估计值

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(k+1)} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{(k)}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{(k)}\boldsymbol{q}^{(k)}.$$

置当前迭代次数为$k \leftarrow k+1$.

步骤3 重复步骤2. 直至$\boldsymbol{\xi}$的估计值满足以下收敛准则$\|\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(k)}-\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(k-1)}\|_1/\|\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(k)}\|_1 \leqslant \epsilon$. 其中$\epsilon$是一个预设的极小的正常数, 这里可取$\epsilon=10^{-4}$, $\|\boldsymbol{v}\|_1$表示向量$\boldsymbol{v}$中所有分量的绝对值之和[15].

3 构建控制图

针对模型(4), 本文旨在建立一种能够同时监控$\boldsymbol{\beta}_i'$和$\boldsymbol{\varepsilon}_i$的控制图, 不管样本轮廓间相关性的强弱, 只要当模型系数或标准差发生偏移时, 控制图都能尽快地发出失控信号. 文章第2部分解决了参数估计的问题, 下面需要构造检验统计量. 似然比检验统计量在控制图领域是一种常用的统计量, 其优点是能够充分利用样本轮廓的数据信息[13], 仿真试验结果表明基于似然比的控制图能快速检测出偏移, 且相较于传统的休哈特类型(shewhart-type) 的控制图需要设定的参数更少[16].

设第i次取样轮廓的观测值为$\{x_{ij},y_{ij}\}_{j=1}^{n}$, 相应的GLMM为模型(4), 并设$\sigma=\sigma_0$. 考虑以下假设检验

$$\begin{cases}\mathrm{H}_0:\boldsymbol{\beta}_i'=\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{0}}',\sigma=\sigma_0,\\ \mathrm{H}_1:\boldsymbol{\beta}_i'\neq\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{0}}' \text{ 或 } \sigma\neq\sigma_0.\end{cases}$$

则第i个样本轮廓的似然比检验统计量为

$$\mathrm{LR_i}=2(\ell_{\mathrm{i}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathrm{i}})-\ell_0(\boldsymbol{\xi}_0)).$$

基于LR统计量, 建立一种直观的休哈特控制图, 其报警条件为

$$\mathrm{LR_i}>h,$$

其中 h是设定的控制限, 用来达到特定的受控状态下的平均链长(in-control ARL, 记为ARL_0).

例如, 设$\mathrm{ARL}_0=200$, 则此时相应的第一类错误(type I error) 的概率为0.5%, 即在受控状态下控制图有0.5%的误报警概率. 为方便讨论, 记此控制图为LR-S. 由于只利用了最后一个样本的观测值, 忽略了此前观测到的一系列样本, 从经验上来讲, 这可能导致LR-S控制图对小偏移不够敏感. 尽管引入警告限(warning limits) 或其他敏化规则(sensitizing rules) 可以改善其在小偏移情形下的性能, 但同时会牺牲其可解释性和受控平均链长ARL_0[17].

为更好地检测第二阶段的小偏移异常, 能将某样本观测值之前的观测值纳入到当前控制统计量当中的累积和CUSUM控制图是一种可选的解决方案. 此外, 本文所讨论的每一个轮廓对应着一个特定的LR统计量, 即合理子组(rational subgroup) 的样本量为1, 这也是CUSUM控制图较为理想的应用场景. 综上所述, 本文基于似然比构建一种CUSUM控制图.

1996年Sullivan等[18]指出, 当$n\to\infty$时, 似然比统计量LR近似服从自由度为2的χ^2分布; 考虑不满足$n\to\infty$这一假设的情况, 2007年Dai等[19]对服从正态分布的单个连续变量的问题提出了一种结合了标准化似然比统计量的CUSUM控制图. 基于Dai等[19]的研究, 对于当前问题, 提出以下CUSUM统计量

$$C_i=\max\left\{0,C_{(i-1)}+\mathrm{SLR_i}\right\},$$

其中 $\mathrm{SLR_i}$是对$\mathrm{LR_i}$进行标准化后的统计量, 即

$$\mathrm{SLR_i}=\frac{\mathrm{LR_i}-E\left(\mathrm{LR}_0\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\mathrm{LR}_0\right)}}.$$

$\mathrm{E}(\mathrm{LR}_0)$和$\mathrm{Var}\left(\mathrm{LR}_0\right)$分别是受控状态下LR统计量的期望和方差, Dai等[19]的研究中给出了质量特性服从一元正态分布时二者关于n的极限分布. 但在当前问题中, 由于研究对象是轮廓数据, 似然函数也相

当复杂, 二者极限分布的解析形式难以得到, 因此这里将通过仿真得出. 对于第i个样本轮廓, 在控制图上描点(i, C_i), 一旦C_i超出了预设的判定值(decision interval) H, 失控信号就会发出, 通过设置H可达到特定的ARL_0. 同样地, 为方便讨论, 记以上CUSUM控制图为LR-C控制图.

4 仿真性能及评价

为了能通过仿真研究所提控制图对响应变量服从二项分布且轮廓间存在相关性的轮廓过程的监控性能, 设$p = 2$, 可得以下GLMM

$$\begin{cases} \operatorname{logit}\left(\pi_{ij}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_j + u_{i1} + u_{i2} z_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \\ \boldsymbol{u}_i = \varphi \boldsymbol{u}_{(i-\mathbf{1})} + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \end{cases}$$

其中设$\beta_0 = 1, \beta_1 = -1, n = 20, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} = \left(\ln(1), \ln(2), \ldots, \ln(20)\right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_2\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}\right), \sigma = 0.05$.

将所设定的受控状态下的仿真数据带入模型(1)中可得相应的不合格品概率π_{ij}, 仿真时本文假设所有解释变量$\boldsymbol{x}$的取值水平下样本量固定为$N_{ij} = N = 100$, 根据π_{0j}和N生成第一个轮廓数据y_{0j} (二项分布随机数), 然后基于给定的相关系数φ依次生成其余的轮廓数据y_{ij}. 接着, 再基于所生成的相邻的轮廓数据按照第3部分中的参数估计方法估计得出$\hat{\boldsymbol{\xi}}_i$. 再根据第4部分中统计量的计算方法, 由$\hat{\boldsymbol{\xi}}_i$和$\boldsymbol{\xi}_0$计算得出两种控制图的统计量$\mathrm{LR_i}$和C_i. 将两种控制图的控制限设置为$h = H = \chi^2_{0.005,2} = 10.597$, 此时控制图发生第一类错误的概率为$\alpha = 0.005$, 受控平均链长为$\mathrm{ARL}_0 = 200$. 对于本文所提出的考虑自相关的控制图中, $\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\varepsilon}$和φ是三个关键参数, 分别决定了轮廓的底层模型和轮廓间的相关性. 为探究LR-S和LR-C两种控制图在相关性φ的不同水平下, 监控模型系数β_0 (截距) 、β_1 (斜率) 和σ (标准差) 发生失控性能, 在仿真中对于每种失控情况都为相关系数φ设定以下取值: $\varphi = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ (轮廓间相关性由小到大), 且对每种设置都重复进行10 000次仿真. 仿真中为β_0和β_1设定的偏移均以标准差σ为单位, 施加偏移之后分别为$\beta_0 + \lambda\sigma$和$\beta_1 + \kappa\sigma$, 而σ在施加偏移之后为$\gamma\sigma$. 各种偏移情形下ARL的仿真结果如表2∼表4所示, 其中括号内为对应于ARL的标准差.

由表2可知, 对于两种控制图, 给定某一特定偏移 (即λ一定), 随着轮廓间相关系数φ的增大, 二者的ARL性能均有较为明显的变差趋势. 这说明, 两种控制图虽然对于轮廓间存在相关性的轮廓过程有一定的监控效果, 但其性能仍受限于相关性的大小. 相关性越小, 控制图的监控效果越好. 而在轮廓间相关系数φ保持不变时, 随着失控轮廓模型截距上偏移的增加, 两种控制图的ARL性能均有大幅提高, 且在大多数情况下LR-C控制图的表现要优于LR-S控制图, 只有在φ较小$(= 0.1)$ 且偏移较大$(\geqslant 1.5\sigma)$ 时, 后者才有相对前者更好的性能. 对比表3和表2的仿真结果可知, 在相关系数φ相同时, 两种控制图对于斜率β_1上发生偏移时的监控效果几乎都好于截距β_0上发生偏移的情况, 即二者对于轮廓模型斜率上发生异常的情况更加敏感. 除此之外, 表3中两种控制图对于不同相关性, 不同偏移大小的ARL性能变化规律则与表2非常相似. 由表4所示的仿真结果可知, 两种控制图对于模型标准差发生变异的检测性能十分显著. 值得注意的是, 在轮廓的标准差σ发生偏移时, 无论轮廓间相关性的大小, LR-C控制图在各种σ偏移水平下的ARL性能均优于LR-S控制图.

此外, 对于表2∼表4中的每种失控情形, LR-C控制图ARL的标准差都小于LR-S控制图, 说明前者所采用的基于标准化似然比的CUSUM统计量相较于后者的似然比统计量有更小的波动, 这将使得LR-C在实际应用中的可靠性相对更高.

根据本节的仿真结果可知, 本文提出的两种控制图具有良好的监控效果, 尤其是当模型标准差发生偏移的时候, 两种控制图的ARL性能尤为突出. 整体上来讲, LR-C控制图的ARL性能要优于LR-S控制图. 此外,

对于每一种特定的偏移情形(即λ、κ或γ不变), 随着轮廓间相关性的变强(φ变大), 两种控制图的ARL仿真结果都有不同程度的增大, 这说明了轮廓间的相关性对于控制图的性能仍有影响, 反映了模型(4) 虽然一定程度上减弱了原始样本轮廓间的相关性, 但实际上并未完全消除, 原因是在理论推导时使用的最小二乘法估计量是一致的但不是无偏的, 如何进一步削弱甚至消除轮廓间相关性对于控制图性能的影响, 仍有待进一步研究.

表 2 偏移发生在截距β_0 上时ARL的性能比较

Table 2 ARL comparisons with shifts in the intercept β_0

φ	控制图类型	λ						
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0
0.1	LR-S	143.1 (10.49)	87.2 (15.94)	50.5 (9.40)	26.1 (4.75)	15.2 (2.83)	3.9 (0.73)	2.0 (0.37)
	LR-C	91.9 (6.80)	26.0 (10.42)	15.0 (6.19)	8.2 (3.23)	6.9 (1.86)	4.8 (0.48)	2.4 (0.25)
0.3	LR-S	155.3 (8.16)	106.4 (17.49)	77.5 (14.12)	56.6 (10.45)	49.0 (9.12)	42.5 (7.85)	32.4 (5.92)
	LR-C	104.5 (5.40)	65.9 (11.25)	53.3 (9.42)	47.5 (7.00)	36.8 (6.07)	25.6 (5.05)	16.8 (3.95)
0.5	LR-S	187.4 (2.32)	139.1 (11.12)	125.6 (13.68)	101.1 (18.19)	90.1 (16.92)	86.6 (15.72)	72.5 (13.13)
	LR-C	135.3 (1.55)	115.8 (7.38)	98.4 (9.05)	92.8 (11.88)	72.2 (11.09)	55.5 (10.47)	35.8 (8.63)
0.7	LR-S	193.6 (1.19)	175.3 (4.53)	171.6 (5.20)	154.2 (8.63)	141.8 (10.89)	136.2 (11.75)	121.0 (14.87)
	LR-C	175.5 (0.79)	168.9 (2.97)	149.9 (3.47)	148.5 (5.62)	127.8 (7.01)	81.8 (7.78)	55.9 (9.77)
0.9	LR-S	196.3 (0.67)	194.8 (0.96)	180.8 (3.55)	171.9 (5.29)	163.2 (6.86)	154.4 (8.38)	149.5 (9.20)
	LR-C	195.8 (0.44)	194.1 (0.63)	176.6 (2.33)	167.7 (3.45)	156.0 (4.53)	96.0 (5.50)	69.6 (6.25)

表 3 偏移发生在斜率β_1 上时ARL 的性能比较

Table 3 ARL comparisons with shifts in the slope β_1

φ	控制图类型	κ						
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0
0.1	LR-S	173.4 (4.86)	111.5 (16.05)	72.5 (13.13)	25.2 (4.65)	15.8 (2.90)	6.8 (1.28)	3.6 (0.66)
	LR-C	113.3 (3.18)	40.8 (10.86)	24.4 (8.90)	19.9 (3.06)	13.7 (1.94)	8.1 (0.84)	4.8 (0.44)
0.3	LR-S	174.6 (4.75)	124.6 (14.13)	84.4 (15.77)	40.9 (7.42)	30.1 (5.58)	17.1 (3.20)	10.5 (1.95)
	LR-C	125.3 (3.03)	55.0 (9.16)	36.1 (10.43)	19.6 (4.97)	12.2 (3.59)	7.8 (2.09)	5.4 (1.29)
0.5	LR-S	179.7 (3.83)	153.5 (8.63)	109.0 (16.85)	70.0 (12.91)	53.3 (9.89)	31.6 (5.87)	19.9 (3.63)
	LR-C	148.8 (2.46)	88.5 (5.67)	55.0 (11.05)	22.7 (8.55)	15.1 (6.49)	9.0 (3.79)	6.6 (2.43)
0.7	LR-S	188.2 (2.19)	169.9 (5.52)	144.8 (10.07)	97.0 (18.27)	81.4 (15.23)	51.4 (9.52)	31.4 (5.69)
	LR-C	165.4 (1.42)	119.7 (3.58)	76.8 (6.79)	32.3 (11.78)	23.3 (9.81)	13.0 (6.21)	8.5 (3.73)
0.9	LR-S	193.8 (1.13)	170.1 (5.54)	147.3 (9.92)	113.1 (16.32)	88.3 (16.06)	57.8 (10.81)	38.8 (7.24)
	LR-C	174.0 (0.74)	137.3 (3.56)	86.0 (6.40)	36.6 (10.46)	26.8 (10.89)	15.5 (6.88)	9.5 (4.69)

表 4 标准差σ发生偏移时ARL的性能比较

Table 4 ARL comparisons when the standard deviation shifts

φ	控制图类型	γ						
		1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.50
0.1	LR-S	37.7 (7.10)	14.4 (2.71)	7.8 (1.46)	4.5 (0.82)	2.9 (0.53)	1.7 (0.32)	1.1 (0.21)
	LR-C	28.7 (4.57)	10.0 (1.78)	5.5 (0.95)	3.1 (0.56)	2.4 (0.36)	1.3 (0.21)	1.0 (0.13)
0.3	LR-S	40.3 (7.40)	15.9 (2.96)	8.9 (1.62)	5.9 (1.10)	3.8 (0.70)	2.4 (0.45)	2.0 (0.36)
	LR-C	30.9 (4.92)	10.9 (1.96)	6.2 (1.07)	3.8 (0.71)	3.2 (0.47)	2.0 (0.30)	1.7 (0.24)
0.5	LR-S	43.9 (7.95)	17.6 (3.22)	10.1 (1.87)	7.1 (1.29)	4.8 (0.90)	3.2 (0.58)	3.1 (0.56)
	LR-C	33.3 (5.35)	11.9 (2.10)	7.1 (1.21)	4.5 (0.86)	4.1 (0.59)	2.8 (0.39)	2.6 (0.37)
0.7	LR-S	45.7 (8.30)	19.2 (3.56)	11.6 (2.14)	8.1 (1.53)	6.0 (1.13)	4.2 (0.79)	4.1 (0.75)
	LR-C	35.5 (5.51)	13.7 (2.28)	8.1 (1.43)	5.5 (1.00)	5.2 (0.72)	3.6 (0.51)	3.5 (0.49)
0.9	LR-S	47.3 (8.68)	20.5 (3.81)	12.8 (2.36)	8.9 (1.63)	6.9 (1.30)	5.0 (0.92)	4.9 (0.90)
	LR-C	37.8 (5.79)	15.1 (2.44)	8.9 (1.54)	6.3 (1.07)	6.0 (0.85)	4.6 (0.60)	4.3 (0.58)

5 结束语

本文针对响应变量服从二项分布且轮廓间存在相关性的轮廓过程的第二阶段控制问题, 提出了一种不含相关项的转化模型, 基于此模型构建了两种整合了似然比统计量的控制图, 并通过仿真方法比较了不同相关性水平下当轮廓模型的截距、斜率以及标准差发生偏移时两种控制图的ARL性能, 其中所提出的CUSUM控制图(LR-C) 在所设定的各种偏移情形下均表现出比较良好的ARL性能, 较好地解决了文章所提出的问题. 同时本文也存在一些局限性, 如两种控制图是基于AR (1)模型提出的, 如何将模型和方法拓展到高阶相关的情形, 需要进一步研究.

参考文献:

[1] 孙　静, 杨穆尔. 多元自相关过程的残差T^2控制图. 清华大学学报(自然科学版), 2007, 47(12): 2184–2187.
Sun J, Yang M E. Residual-based T^2 control chart for monitoring multivariate auto-correlated processes. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2007, 47(12): 2184–2187. (in Chinese)

[2] 黄　虎, 柯　华, 王　晶. 基于逆加权参数估计方法的改进型Q控制图研究. 系统工程学报, 2016, 31(04): 568–574.
Huang H, Ke H, Wang J. Improved Q chart based on inverse weighted parameter estimation. Journal of Systems Engineering, 2016, 31(04): 568–574. (in Chinese)

[3] Montgomery D C, Mastrangelo C M. Some statistical process control methods for autocorrelated data. Journal of Quality Technology, 1991, 23(3): 179–193.

[4] 杨穆尔, 孙　静. 二元自相关过程的残差T^2控制图. 清华大学学报(自然科学版), 2006, 46(3): 403–406.
Yang M E, Sun J. Residual-based T^2 control chart for bivariate autocorrelated processes. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2006, 46(3): 403–406. (in Chinese)

[5] 马义中, 田　甜, 刘利平. 自相关过程协方差阵的残差MEWMA控制图. 系统工程学报, 2012, 27(2): 279–286.
Ma Y Z, Tian T, Liu L P. Residual-based MEWMA control chart for the covariance matrix of autocorrelated process. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(2): 279–286. (in Chinese)

[6] Kang L, Albin S L. On-line monitoring when the process yields a linear profile. Journal of Quality Technology, 2000, 32(4): 418–426.

[7] Noorossana R, Amiri A, Soleimani P. On the monitoring of autocorrelated linear profiles. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2008, 37: 425–442.

[8] Soleimani P, Noorossana R, Amiri A. Simple linear profiles monitoring in the presence of within profile autocorrelation. Computers & Industrial Engineering, 2009, 57(3): 1015–1021.

[9] Zhang Y, He Z, Zhang C, et al. Control charts for monitoring linear profiles with within-profile correlation using Gaussian process models. Quality and Reliability Engineering International, 2014, 30(4): 487–501.

[10] Khedmati M, Niaki S T. Phase II monitoring of general linear profiles in the presence of between-profile autocorrelation. Quality and Reliability Engineering International, 2016, 32(2): 443–452.

[11] Yeh A B, Huwang L, Li Y M. Profile monitoring for a binary response. IIE Transactions, 2009, 41(11): 931–941.

[12] Koosha M, Amiri A. Generalized linear mixed model for monitoring autocorrelated logistic regression profiles. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013, 64: 1–9.

[13] McCulloch C E. Maximum likelihood algorithms for generalized linear mixed models. Journal of the American Statistical Association, 1997, 92(437): 162–170.

[14] Shang Y, Tsung F, Zou C. Profile monitoring with binary data and random predictors. Journal of Quality Technology, 2011, 43(3): 196–208.

[15] Shang Y, Zi X, Tsung F, et al. LASSO-based diagnosis scheme for multistage processes with binary data. Computers & Industrial Engineering, 2014, 72(1): 198–205.

[16] 何 桢, 左 玲, 张 敏. 基于广义似然比的图像数据监控方法. 系统工程学报, 2016, 31(1): 127–134.
He Z, Zuo L, Zhang M. Image data process control based on generalized likelihood ratio. Journal of Systems Engineering, 2016, 31(1): 127–134. (in Chinese)

[17] Montgomery D C. Introduction to Statistical Quality Control. New York: John Wiley & Sons, 2007.

[18] Sullivan J H, Woodall W H. A control chart for preliminary analysis of individual observations. Journal of Quality Technology, 1996, 28(3): 265–278.

[19] Dai Y, Wang Z J, Zou C L. CUSUM control charts based on likelihood ratio for preliminary analysis. Science in China Series A: Mathematics, 2007, 50(1): 47–62.

作者简介:

商艳芬 (1981—), 女, 博士, 副教授, 研究方向: 质量工程与质量管理, Email: syf8110@126.com;

李 振 (1993—), 男, 硕士生, 研究方向: 质量工程与质量管理, Email: lizhen1510@163.com;

何曙光 (1975—), 男, 博士, 教授, 研究方向: 现代工业工程理论与应用, Email: shuguanghe@tju.edu.cn.