通胀与生存约束下最优投资和自愿退休选择

费为银[1], 陈雅豪[1], 费　晨[2]
(1. 安徽工程大学数理学院, 安徽 芜湖 241000; 2. 东华大学旭日工商管理学院, 上海 200051)

摘要: 研究在通胀下, 代理人退休选择、最优消费和投资组合决策问题. 运用伊藤公式(Itô 公式)推导了通胀折现的财富动力学方程, 基于考虑退休前后的预期消费折现效用最大化标准, 利用动态规划方法建立了相应的 HJB 方程, 并求解出最优消费、投资组合与自愿退休选择策略. 最后对理论结果给出数值模拟. 结果表明, 退休前, 适当的通胀波动率会带动代理人积极投资, 消费反而减少, 若通胀波动率过大, 代理人会减少投资增加消费来预防通胀风险带来的损失; 退休后, 代理人的投资和消费均会增加. 研究结果对投资者具有参考价值.

关键词: 自愿退休; 投资组合选择; 生存消费约束; 通货膨胀; 动态规划方法
中图分类号: O211.63; F224.9　　文献标识码: A　　文章编号: 1000−5781(2020)01−0060−13
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2020.01.006

An optimal investment and voluntary retirement choice problem with subsistence consumption constraints under inflation

Fei Weiyin[1], **Chen Yahao**[1], **Fei Chen**[2]
(1. School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China; 2. Glorious Sun School of Business and Management, Donghua University, Shanghai 200051, China)

Abstract: This paper investigates the optimal consumption/portfolio and retirement problem of an agent under inflation. By using Itô formula, the real wealth process discounted by inflation is derived. Based on maximizing the expected discounted utility of consumption both before and after retirement, the corresponding HJB equations are established by applying the dynamic programming method. Furthermore, the strategies for the optimal consumption, portfolio investment and retirement are derived. Finally, a numerical analysis is provided. The result shows that before retirement, the investment of the agent may increase and the consumption may decrease when inflation volatility is appropriate. If the inflation volatility is high, the investment of the agent may decrease and the consumption may increase to provide for the inflation losses. After retirement, both the consumption and investment of the agent may increase. The result of the paper has important reference values for investors.

Key words: voluntary retirement; portfolio selection; subsistence consumption constraints; inflation; dynamic programming method

1 引　言

最优消费与投资组合选择理论, 是资产组合选择理论的扩展和延伸, 是经济学和金融学研究领域的一个热点, 倍受众多国内外学者的关注. 诺贝尔经济学奖获得者 Merton [1]在 1969 年, 就连续时间情形下最优投

收稿日期: 2017−01−12; 修订日期: 2017−12−27.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71571001); 安徽省自然科学基金资助项目 (1608085MA02).

资选择问题进行了研究. 随后, 在 1971 年, Merton [2]发表了关于连续时间情形下的最优消费和投资组合决策问题的文章, 建立了经典的消费和投资模型, 后来其研究的模型不断得到扩展.

许多学者在 Merton 模型的基础上对最优消费和投资组合问题作出了进一步的研究. 代理人用于基本生存需求的消费, 具有基本的意义, 因为人只有维持生命的存在, 才可能追求未来的发展. 故在 Merton 经典的消费和投资模型基础上考虑加入生存消费等约束条件有现实意义. Karatzas 等 [3] 1986 年研究了经济代理人使得消费的总预期折现效用最大化的一般消费投资问题, 并且通过动态规划方法得出了闭型解, 推广了 Merton [1,2]的结果. Vila 等 [4] 研究了在借贷约束下的投资组合选择问题, 并在 CRRA (constant relative risk aversion, 常数相对风险厌恶)效用下考虑借贷约束对消费-投资策略的影响. 在 Merton [1,2]与 Karatzas 等 [3]完备市场的模型下, Lakner 等 [5] 研究了投资者的消费率过程和终端财富具有下方约束的投资组合优化问题, 并通过 Malliavin 随机变分获得了显式解. Gong 等 [6]借助动态规划原理, 在 CRRA 效用函数下研究了指数债券在带有生存消费约束的动态消费和资产分配模型中的作用. Shin 等 [7]对 Gong 等 [6]的研究进行了推广, 考虑一般效用函数情形下带有下方约束的最优消费、投资组合问题, 利用 Feynman-Kac 公式获得显式解. 常浩等 [8]研究了不同借贷利率情形下动态资产分配问题, 得到不同效用函数下的最优投资策略, 并通过求解 HJB 方程获得最优解. 康志林等 [9]探讨了以极小化最大个人风险为目标的 minimax 最优投资组合双目标规划决策模型, 应用 Lagrange 乘子法和 KKT 条件推导出最优投资策略的解析表达式. 王华等 [10]考虑周期风险模型下保险人投资多种风险资产的最优化问题, 采用鞅方法得到了最优投资策略的解析解. 在 Merton 跳扩散模型的基础上, 史敬涛 [11]研究了相关随机干扰下跳跃扩散模型描述的最优消费投资决策问题, 根据 HJB 方程获得了最优消费和投资组合策略.

然而随着时代的变革, Merton 模型已经很难较好的解释现在的金融问题, 于是国内外学者逐步将一些现实因素以及市场的不确定因素考虑进来比如考虑带有闲暇、劳动收入、退休选择等因素的最优消费投资问题研究. 伴随着生活水平和医疗水平的提高, 个人的平均寿命相比以前有了快速的增长, 如此一来, 造成的结果就是现代人的退休生活大幅延长. 不言而喻, 人们需要预先进行基于退休目的的财务策划, 将老年时各种不确定因素对生活的影响程度降到最低. 因此个体为自身退休而进行投资的需求就变得日益重要. Choi 等 [12]研究了劳动负效用框架下代理人的最优消费-投资及自愿退休问题, 这个问题的一个特别之处就是代理人拥有退休选择权, 如果代理人的财富达到了某个临界财富水平, 那么他立即退休. 在退休之前他可以获得相应的劳动收入但是同时也会遭受劳动带来的效用损失, 退休后可以避免这种损失但同时也要放弃劳动收入, 利用 Karatzas 等 [3] 研究中的动态规划方法提供了最优消费、投资组合和退休时间的显式解. 与 Choi 等 [12]研究的问题类似, Farhi 等 [13]在劳动闲暇框架下利用对偶方法研究了最优消费、投资组合与退休选择问题, 并且其消费和闲暇的效用函数是柯布道格拉斯型. Choi 等 [14]在 Choi 等 [12]研究的基础上考虑了一个无限寿命的代理人自愿退休的最优消费- 闲暇及投资组合问题, 其中代理人的消费偏好是由一般的 CES 效用函数(柯布道格拉斯效用函数是其中的一种特殊情形)来刻画, 并利用对偶方法得到问题的闭型解. Fei [15]对 Choi 等 [14]的工作也进行了研究, 不同的是, 他在文中构建了一个区分含糊与含糊态度的 α 最大最小 CES 预期效用, 并通过运用变分不等式与倒向随机微分方程理论解决该问题, 得出退休前后的最优消费闲暇和投资策略的闭型解. 刘宏建等 [16]研究 Knight 不确定环境对投资者的最优消费-投资策略的影响, 运用倒向随机微分方程理论得出了最优策略的显式解. Lee 等 [17]研究了带有生存消费约束的最优消费、投资与自愿退休选择问题, 基于 Karatzas 等 [3] 研究中的动态规划方法得到了显式解. 然而, 随着市场的不断发展, 金融市场充满了时变性, 仅考虑上述不确定因素已经无法真实、准确的刻画实际的金融市场.

众所周知, 近些年来受到金融危机的影响, 包括我国在内的世界经济一直处于通货膨胀状态. 以我国为例, 2014 年全国居民消费价格总水平同比上涨1.5%, 2015 年全年居民消费价格比上年上涨1.4%, 2016 年居民消费价格比上年上涨 2.0%, 在未来相对较长的一段时期内, 通货膨胀将会保持较高的状态. 通货膨胀会影响代理人对投资组合的判断, 使得预期收益难以预料. 因此, 通货膨胀必将成为投资者今后考虑的重要因素之一. 自 20 世纪 70 年代以来, 国内外许多学者研究了在通胀背景下的资产配置策略. Brennan 等 [18]采用鞅

方法研究了考虑通胀动态投资组合最优化问题. Siu [19]研究了带有通胀风险的长期战略资产配置问题, 采用鞅方法给出了最优配置策略. Lim [20]在 Gong 等 [6]研究的基础上, 考虑通胀风险和生存约束条件下的最优投资组合选择问题, 其中为了对冲通胀风险, 投资了一种指数债券, 且利用鞅方法得到了最优的消费率和投资组合, 另外, 也给出了通胀风险和生存消费对最优策略的定量分析. 根据 Brennan 等 [18]的思路, 姚海祥等 [21]研究了通货膨胀因素下带有连续时间均值–方差模型的投资组合选择问题. 费为银等 [22]在 CRRA 效用函数的情形下, 参考 Fei [15]同样构建了 α-maxmin 期望效用, 并分析了通胀和 Knight 不确定等因素对最优投资策略的影响, 并获得了投资策略的显式解. 梁勇等 [23]研究了通胀环境下考虑 Knight 不确定对投资者投资策略的影响. 费为银等 [24]研究了含糊厌恶投资者在通胀环境下受到极端事件冲击的最优投资策略选择问题, 其中利用通货膨胀率对风险资产价格进行折算的方法与费为银等 [22]相同. 费为银等 [25] 在递归效用的情形下, 考虑投资者带通胀的最优消费和投资问题, 利用动态规划的思想, 获得了最优消费与投资策略. 费为银等 [26]研究了通货膨胀在跳扩散环境下对投资者最优动态资产配置的影响. 费为银等 [27]在通胀等因素影响下对带有激励的对冲基金最优投资策略进行了研究.

通过上述文献综合分析, 我们发现现有的文献一般往往仅考虑生存消费与退休选择或只考虑通胀的情况, 不能够更好地契合现实的金融市场. 为了改进现有研究的不足, 本文将在前人工作的基础上同时考虑通胀、生存消费与退休选择三种因素的结合. 在通胀环境下建立模型, 并推导真实环境下的财富过程, 这更符合当前的金融市场, 利用动态规划方法对现有的模型进行进一步推广, 根据随机控制理论建立 HJB 方程, 得到了最优消费、投资组合与退休时间的显式解, 并对所得结论进行数值模拟分析, 给出合理的经济解释, 使得模型更加符合现实.

2 投资优化模型

假设无风险资产名义价格 B_t^N 和风险资产名义价格 S_t^N 根据下列方程演化

$$\frac{\mathrm{d}B_t^N}{B_t^N} = R\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\mathrm{d}S_t^N}{S_t^N} = \mu_s\mathrm{d}t + \sigma_s\mathrm{d}Z_t,$$

其中 R 是确定性的无风险利率, μ_s 是风险资产的平均回报, σ_s 是风险资产收益的波动率, Z_t 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 上的标准布朗运动.

设消费篮子价格的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \mu_p\mathrm{d}t + \sigma_p\mathrm{d}Z_t,$$

其中 μ_p 是预期通胀率, $\sigma_p > 0$ 是波动率. 假定 R 、μ_s 、μ_p 、σ_s 和 σ_p为常数.

用 π_t^N 表示 t 时刻投资于风险资产的名义投资金额, c_t^N 表示 t 时刻的名义消费率. 如果 π_t^N 是可测的并适应于 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\pi_t^N := \{\pi_t^N\}_{t\geqslant 0}$ 是一个投资组合过程. 如果 c_t^N 是可测、非负并适应于 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $c_t^N := \{c_t^N\}_{t\geqslant 0}$ 是一个消费率过程. 此外, 它们满足以下条件

$$\int_0^t (\pi_s^N)^2\mathrm{d}s < \infty, \int_0^t c_s^N\mathrm{d}s < \infty, \text{a.s.}$$

代理人直到退休之前都可以获得劳动收入, 名义工资率由 w_t^N 表示. τ 是劳动中的退休时间, 它是 $\mathscr{F}_t$ 停时. 代理人被赋予的财富初始金额为 $X_0 = x$. 设 X_t^N 是代理人在时刻 t 的名义财富量, 则名义财富过程可由下列方程演化

$$\mathrm{d}X_t^N = \pi_t^N\frac{\mathrm{d}S_t^N}{S_t^N} + (X_t^N - \pi_t^N)\frac{\mathrm{d}B_t^N}{B_t^N} - c_t^N\mathrm{d}t + w_t^N\mathrm{d}t.$$

设 X_t 是代理人在时刻 t 的真实财富量, 则实际财富过程由下列方程演化

$$X_t \triangleq \frac{X_t^N}{P_t}.$$

根据伊藤公式可得

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{P_t}\right) = -\frac{1}{P_t}\big[(\mu_p - \sigma_p^2)\mathrm{d}t + \sigma_p \mathrm{d}Z_t\big],$$

进而有

$$\mathrm{d}X_t = \big[w_t - c_t + \pi_t(\mu_s - R - \sigma_s\sigma_p) + X_t(R + \sigma_p^2 - \mu_p)\big]\mathrm{d}t + (\pi_t\sigma_s - X_t\sigma_p)\mathrm{d}Z_t, \tag{1}$$

其中 π_t 是代理人投资于风险资产的真实投资金额, c_t 表示的是消费者在 t 时刻的真实消费率, 且 $c_t > 0$, w_t 是单位时间真实工资率. 为了求解方便, 假设 $w_t = w$ 为常数, 且满足 $w_t^N = w_t P_t$.

注意到, $B_t = \dfrac{B_t^N}{P_t}$ 是代理人在时刻 t 实际的无风险资产价格, 则其过程由下列方程演化 $\dfrac{\mathrm{d}B_t}{B_t} \triangleq (R + \sigma_p^2 - \mu_p)\mathrm{d}t - \sigma_p \mathrm{d}Z_t$, 于是有真实利率 $r = R - \mu_p + \sigma_p^2 + \theta\sigma_p$, 其中市场风险价格由 $\theta \triangleq \dfrac{\mu_s - R - \sigma_s\sigma_p}{\sigma_s}$ 表示.

现考虑代理人仅在退休前受到生存消费约束, 以 $q > 0$ 表示一个退休前正的生存消费水平, 代理人的目标是使消费的预期折现效用最大化, 并有如下约束: $c_t \geqslant q$, 对于所有 $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

当 $q > w$, 代理人不能退休, 所以假设 $q < w$. 代理人的消费效用函数被假定为 CRRA 型 $u(c) := \dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma > 0 (\gamma \neq 1)$, 其中 γ 是代理人的相对风险厌恶系数. 在初始资本 $X_0 = x > (q - w)/r$ 处, 一个消费、投资组合及退休时间的三元组 (c, π, τ) 是可容许的. 式(1) 中的财富过程 X_t 满足以下条件: 当 $0 \leqslant t < \tau$ 时, 有 $X_t > (q - w)/r, c_t \geqslant q$; 且当 $\tau \leqslant t$ 时, 有 $X_t \geqslant 0$. 令 $\mathcal{A}(x)$ 是关于 x 的可容许的三元组 (c, π, τ) 的集合. 代理人的目标就是最大化预期折现效用, 即

$$V(x) = \operatorname*{Max}_{(c,\pi,\tau)\in\mathcal{A}(x)} J(x; c, \pi, \tau), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} J(x; c, \pi, \tau) &= \mathrm{E}\Big[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\delta t}\Big(\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - l\Big)\mathrm{d}t + \int_\tau^\infty e^{-\delta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\mathrm{d}t\Big] \\ &= \mathrm{E}\Big[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\delta t}\Big(\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - l\Big)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\delta\tau}U(X_\tau)\Big], \end{aligned}$$

其中 $\delta > 0$ 是代理人的主观折现率, $l > 0$ 是代理人的劳动负效用常量, $U(\cdot)$ 是经典 Merton 问题的值函数(见文献[1, 2]), 由下式给出

$$U(x) = \frac{K^{-\gamma}}{1-\gamma}x^{1-\gamma},$$

其中 $K = r + \dfrac{\delta - r}{\gamma} + \dfrac{\gamma - 1}{2\gamma^2}\theta^2.$

假设 1 为了保证优化问题 (2) 有定义, 假定 $K > 0$.

3 最优消费投资策略

为了解决优化问题 (2), 要进行如下步骤: 首先, 猜测存在一个临界财富水平 $\bar{x}$ 对应于最优退休时间 τ^*. 其次, 可以获得最优消费/投资组合的显式形式与退休之前的值函数. 最后, 通过值函数 $V(x)$ 在 $x = \bar{x}$ 处的光滑粘性条件决定临界财富水平 $\bar{x}$, 并得到整个最优消费/投资组合过程与值函数.

对于 $t<\tau^*$, 值函数 $V(x)$ 的 HJB 方程为

$$\begin{aligned}\delta V(x)=\underset{c\geqslant q,\pi}{\mathrm{Max}}\big\{&[w-c+\pi(\mu_s-R-\sigma_s\sigma_p)+x(R+\sigma_p^2-\mu_p)]V'(x)+\\&\frac{1}{2}(\pi^2\sigma_s^2-2\pi\sigma_s\sigma_p x+\sigma_p^2x^2)V''(x)+\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}-l\big\}.\end{aligned}\tag{3}$$

猜测存在一个临界财富水平 $\bar{x}$ 对应于最优退休时间 τ^*, 并获得退休后的值函数

$$V(x)=U(x).\tag{4}$$

通过消费/投资组合过程的 HJB 方程 (3) 的一阶条件, 有

$$c^*=[V'(x)]^{-\frac{1}{\gamma}},\tag{5}$$

$$\pi^*=\frac{x\sigma_p}{\sigma_s}-\frac{\theta V'(x)}{\sigma_s V''(x)}.\tag{6}$$

引入另一个临界财富水平 $\tilde{x}$, 由于生存消费约束, 有

$$c^*=\begin{cases}q, & (q-w)/r<x<\tilde{x},\\ [V'(x)]^{-\frac{1}{\gamma}}, & \tilde{x}\leqslant x<\bar{x}.\end{cases}\tag{7}$$

将式(6) 与 式(7) 代入 HJB 方程 (3) 得

$$\delta V(x)=(w-q+rx)V'(x)-\frac{1}{2}\theta^2\frac{[V'(x)]^2}{V''(x)}+\frac{q^{1-\gamma}}{1-\gamma}-l,\ \ (q-w)/r<x<\tilde{x},\tag{8}$$

$$\delta V(x)=(rx+w)V'(x)-\frac{1}{2}\theta^2\frac{[V'(x)]^2}{V''(x)}+\frac{\gamma}{1-\gamma}[V'(x)]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-l,\ \ \tilde{x}\leqslant x<\bar{x}.\tag{9}$$

引入两个二次函数如下

$$f(\alpha):=r\alpha^2-(\delta+r+\frac{1}{2}\theta^2)\alpha+\delta,\tag{10}$$

$$g(\beta):=\frac{1}{2}\theta^2\beta^2+(\delta-r+\frac{1}{2}\theta^2)\beta-r,\tag{11}$$

其中 $f(\alpha)=0$ 有两个实根 α_1 和 α_2 满足 $\alpha_1>1>\alpha_2>0$, 并且 $g(\beta)=0$ 有两个实根 β_1 和 β_2 满足 $\beta_1>0,\beta_2<-1$, 并且两个二次函数根之间的关系如下

$$\beta_1=\frac{1}{\alpha_1-1},\beta_2=\frac{1}{\alpha_2-1}.\tag{12}$$

根据上述分析, 有下列结论

定理 1 假设 $v(\cdot)$ 是一个严格增且严格凹的函数, 并满足 $v(\cdot)\in C^1((q-w)/r,\infty)$ 和 $v(\cdot)\in C^2((q-w)/r,\infty)\backslash\{\bar{x}\}$, 使得当 $x<\bar{x}$ 时, $v(\cdot)$ 是 HJB 方程 (3) 的解; 当 $\bar{x}\leqslant x$ 时, 有 $v(x)=U(x)$, 并且在 $x=\bar{x}$ 处带有光滑粘性条件, 那么对于所有可容许的三元组 (c,π,τ) 有 $v(x)\geqslant J(x;c,\pi,\tau)$. 现定义

$$\tau^*:=\inf\{t\geqslant 0:X_t\geqslant\bar{x}\},\ c_t^*:=\begin{cases}c_t^{1,*}, & 0\leqslant t<\tau^*,\\ c_t^{2,*}, & \tau^*\leqslant t,\end{cases}\ \pi_t^*:=\begin{cases}\pi_t^{1,*}, & 0\leqslant t<\tau^*,\\ \pi_t^{2,*}, & \tau^*\leqslant t,\end{cases}$$

其中 $(c_t^{1,*},\pi_t^{1,*})$ 是使 HJB 方程 (3) 右式达到最大的解, $(c_t^{2,*},\pi_t^{2,*})$ 是对应于值函数 $U(x)$ 的最优消费、投资组合过程. 那么

$$v(x)=V(x)=\underset{(c,\pi,\tau)\in\mathcal{A}(x)}{\mathrm{Max}}J(x;c,\pi,\tau)=J(x;c^*,\pi^*,\tau^*).$$

证明 定义

$$W(t,X_t)=\mathrm{e}^{-\delta t}v(X_t).$$

根据伊藤引理, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W(t,X_t)=&\mathrm{e}^{-\delta t}\big\{\big[w_t-c_t+\pi_t(\mu_s-R-\sigma_s\sigma_p)+X_t(R+\sigma_p^2-\mu_p)\big]v'(X_t)-\delta v(X_t)+\\&\frac{1}{2}(\pi_t\sigma_s-X_t\sigma_p)^2v''(X_t)\big\}+(\pi_t\sigma_s-X_t\sigma_p)\mathrm{e}^{-\delta t}v'(X_t)\mathrm{d}Z_t\\\leqslant&-\mathrm{e}^{-\delta t}(\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-l)\mathrm{d}t+(\pi_t\sigma_s-X_t\sigma_p)\mathrm{e}^{-\delta t}v'(X_t)\mathrm{d}Z_t.\end{aligned}$$

对于 $s\geqslant 0$, 有

$$v(X_0)\geqslant\int_0^{s\wedge\tau^*}\mathrm{e}^{-\delta t}\Big(\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-l\Big)\mathrm{d}t+W(s\wedge\tau^*,X_{s\wedge\tau^*})-\int_0^{s\wedge\tau^*}(\pi_t\sigma_s-X_t\sigma_p)\mathrm{e}^{-\delta t}v'(X_t)\mathrm{d}Z_t.\tag{13}$$

式 (13) 右边的第二个积分是一个有界局部鞅, 因此是鞅, 所以

$$v(x)\geqslant\mathrm{E}\Big[\int_0^{s\wedge\tau^*}\mathrm{e}^{-\delta t}\Big(\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-l\Big)\mathrm{d}t+W(s\wedge\tau^*,X_{s\wedge\tau^*})\Big].$$

令 $s\uparrow\infty$并且使用单调收敛定理与勒贝格控制收敛定理, 得

$$v(x)\geqslant\mathrm{E}\Big[\int_0^{\tau^*}\mathrm{e}^{-\delta t}\Big(\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-l\Big)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\delta\tau^*}U(X_\tau^*)\Big]=J(x;c,\pi,\tau^*).\tag{14}$$

由 $(c_t^{1,*},\pi_t^{1,*})$ 是使 HJB 方程 (3) 右式达到最大的解, 故等式 (14) 成立, 得 $v(x)=V(x)$. 证毕.

根据上述分析, 有下列结论

定理 2 优化问题 (2) 的值函数为

$$V(x)=\begin{cases}C_2\big(x-\dfrac{q}{r}+\dfrac{w}{r}\big)^{\alpha_2}+\dfrac{q^{1-\gamma}}{\delta(1-\gamma)}-\dfrac{l}{\delta}, & (q-w)/r<x<\tilde{x},\\ \dfrac{r-\frac{1}{2}\theta^2\beta_1}{\delta}D_1\xi^{-\gamma(\beta_1+1)}+\dfrac{r-\frac{1}{2}\theta^2\beta_2}{\delta}D_2\xi^{-\gamma(\beta_2+1)}+\dfrac{\xi^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)}-\dfrac{l}{\delta}, & \tilde{x}\leqslant x<\bar{x},\\ \dfrac{K^{-\gamma}}{1-\gamma}x^{1-\gamma}, & \bar{x}\leqslant x,\end{cases}$$

其中

$$D_1=\frac{\big(\frac{\alpha_2-1}{\gamma}+1\big)\frac{1}{K}-\frac{1}{r}}{(\alpha_2-1)\beta_1-1}\cdot q^{\gamma\beta_1+1},\tag{15}$$

$$D_2=-D_1(K\bar{x})^{\gamma(\beta_2-\beta_1)}+\frac{w}{r}(K\bar{x})^{\gamma\beta_2},\tag{16}$$

$$\tilde{x}=D_1q^{-\gamma\beta_1}+D_2q^{-\gamma\beta_2}+\frac{q}{K}-\frac{w}{r},\tag{17}$$

$$C_2=\frac{1}{\alpha_2}\big(\tilde{x}-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{1-\alpha_2}q^{-\gamma}.\tag{18}$$

$\bar{x}$ 是以下代数方程的解

$$\frac{\theta^2}{2}(\beta_2-\beta_1)D_1(K\bar{x})^{-\gamma(\beta_1+1)}+(r-\frac{\theta^2}{2}\beta_2)\frac{w}{r}(K\bar{x})^{-\gamma}-l=0.\tag{19}$$

对于 $\tilde{x}\leqslant x<\bar{x}$, ξ 是如下代数方程的解

$$x=D_1\xi^{-\gamma\beta_1}+D_2\xi^{-\gamma\beta_2}+\frac{\xi}{K}-\frac{w}{r}.\tag{20}$$

证明 对于 $(q-w)/r<x<\tilde{x}$, 给出式 (8) 中的一个齐次解形式 $\big(\tilde{x}-\dfrac{q}{r}+\dfrac{w}{r}\big)^{\alpha}$, 由代数方程式(10) $f(\alpha)=0$, 因此得到方程式(8) 的一个齐次形式

$$\tilde{V}(x)=C_1\big(x-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{\alpha_1}+C_2\big(x-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{\alpha_2},$$

容易得到方程 (8) 的特解为 $\dfrac{q^{1-\gamma}}{\delta(1-\gamma)}-\dfrac{l}{\delta}$, 因此

$$V(x)=\tilde{V}(x)+\frac{q^{1-\gamma}}{\delta(1-\gamma)}-\frac{l}{\delta}=C_1\big(x-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{\alpha_1}+C_2\big(x-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{\alpha_2}+\frac{q^{1-\gamma}}{\delta(1-\gamma)}-\frac{l}{\delta},$$

如果 $C_1=0, C_2>0$, 则 $V(x)$ 为凹函数. 为了保证 $V(x)$ 的凹性, 令 $C_1=0$, 则

$$V(x)=C_2\big(x-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{\alpha_2}+\frac{q^{1-\gamma}}{\delta(1-\gamma)}-\frac{l}{\delta},\quad (q-w)/r<x<\tilde{x}, \tag{21}$$

对于 $\tilde{x}\leqslant X_t<\bar{x}$, 将最优消费 c 表示成关于财富 x 的函数 $C(\cdot)$, 其中 $C(\cdot)$ 是 $X(\cdot)$ 的反函数. 于是 $c=C(x), X(c)=X(C(x))=x$. 根据式(7) 的一阶条件, 得到

$$V'(x)=C(x)^{-\gamma}, \tag{22}$$

$$V''(x)=-\gamma\cdot\frac{C(x)^{-\gamma-1}}{X'(c)}. \tag{23}$$

将式(22) 与式(23) 代入方程(9) 中, 得

$$\delta V(X(c))=\big[rX(c)+w\big]c^{-\gamma}+\frac{1}{2\gamma}\theta^2c^{1-\gamma}X'(c)+\frac{\gamma}{1-\gamma}c^{1-\gamma}-l. \tag{24}$$

式 (24) 对 c 求导得

$$\delta c^{-\gamma}X'(c)=-\gamma wc^{-1-\gamma}+rc^{-\gamma}X'(c)-\gamma rc^{1-\gamma}X(c)+\frac{1-\gamma}{2\gamma}\theta^2c^{-\gamma}X'(c)+\frac{1}{2\gamma}\theta^2c^{1-\gamma}X''(c)-l.$$

上式两边同时乘以 $c^{1+\gamma}$, 再移项有

$$\frac{1}{2\gamma}\theta^2c^2X''(c)+\big(r-\delta+\frac{1-\gamma}{2\gamma}\theta^2\big)cX'(c)-\gamma rX(c)+\gamma c-\gamma w=0. \tag{25}$$

求解上述欧拉方程(25) , 得

$$X(c)=D_1c^{-\gamma\beta_1}+D_2c^{-\gamma\beta_2}+\frac{c}{K}-\frac{w}{r}. \tag{26}$$

根据 $X'(c)>0$, 由式(23) 得

$$V''(x)=-\gamma\frac{C(x)^{-\gamma-1}}{X'(c)}<0,$$

于是在 $\tilde{x}\leqslant x<\bar{x}$ 处 $V(x)$ 是凹函数. 由式(24) , 有

$$V(x)=V(X(\xi))=\frac{r-\frac{1}{2}\theta^2\beta_1}{\delta}D_1\xi^{-\gamma(\beta_1+1)}+\frac{r-\frac{1}{2}\theta^2\beta_2}{\delta}D_2\xi^{-\gamma(\beta_2+1)}+\frac{\xi^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)}-\frac{l}{\delta},$$

其中 ξ 是式(20) 的解.

对于 $\bar{x}\leqslant x$, 根据式(4)有

$$V(x)=\frac{K^{-\gamma}}{1-\gamma}x^{1-\gamma}.$$

由式(26)得

$$\tilde{x}=X(q)=D_1q^{-\gamma\beta_1}+D_2q^{-\gamma\beta_2}+\frac{q}{K}-\frac{w}{r},\quad X'(q)=-\gamma\beta_1D_1q^{-\gamma\beta_1-1}-\gamma\beta_2D_2q^{-\gamma\beta_2-1}+\frac{1}{K}. \tag{27}$$

如果在 $x=\tilde{x}$ 处使用 C^1 和 C^2 条件, 再加上式 (21)、式(22) 与式(23), 得

$$V'(\tilde{x})=\alpha_2C_2\big(\tilde{x}-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{\alpha_2-1}=q^{-\gamma}, \tag{28}$$

$$V''(\tilde{x})=\alpha_2(\alpha_2-1)C_2\big(\tilde{x}-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{\alpha_2-2}=-\gamma\frac{q^{-\gamma-1}}{X'(q)}. \tag{29}$$

由式(28) 和式(29), 以及式(27) 得

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= -\frac{\alpha_2-1}{\gamma}qX'(q)+\frac{q}{r}-\frac{w}{r}\\ &= (\alpha_2-1)\beta_1 D_1 q^{-\gamma\beta_1}+(\alpha_2-1)\beta_2 D_2 q^{-\gamma\beta_2}-\frac{\alpha_2-1}{\gamma}\cdot\frac{q}{K}+\frac{q}{r}-\frac{w}{r}.\end{aligned}\tag{30}$$

由式 (27) 中的 $\tilde{x}$ 与式 (30) 中的 $\tilde{x}$ 联立, 以及 $\beta_2=\dfrac{1}{\alpha_2-1}$, 有

$$D_1 q^{-\gamma\beta_1}+D_2 q^{-\gamma\beta_2}+\frac{q}{K}-\frac{w}{r}=(\alpha_2-1)\beta_1 D_1 q^{-\gamma\beta_1}+(\alpha_2-1)\beta_2 D_2 q^{-\gamma\beta_2}-\frac{\alpha_2-1}{\gamma}\cdot\frac{q}{K}+\frac{q}{r}-\frac{w}{r},$$

得到式(15) 中

$$D_1=\frac{(\frac{\alpha_2-1}{\gamma}+1)\frac{1}{K}-\frac{1}{r}}{(\alpha_2-1)\beta_1-1}q^{\gamma\beta_1+1}.$$

由式(28) , 可得式(18) 中

$$C_2=\frac{1}{\alpha_2}\big(\tilde{x}-\frac{q}{r}+\frac{w}{r}\big)^{1-\alpha_2}q^{-\gamma}.$$

在 $x=\bar{x}$ 处对 $V(x)$ 使用光滑粘性条件, 有

$$V'(x)=\bar{c}^{-\gamma}=(K\bar{x})^{-\gamma},\tag{31}$$

其中 $\bar{c}$ 是当财富水平是 $\bar{x}$ 时的最优消费. 有

$$X(\bar{c})=\bar{x}=D_1\bar{c}^{-\gamma\beta_1}+D_2\bar{c}^{-\gamma\beta_2}+\frac{\bar{c}}{K}-\frac{w}{r},\tag{32}$$

其中 $\bar{c}=K\bar{x}$, 联立式(31) 与式(32), 得到式(16) 中 $D_2=-D_1(K\bar{x})^{\gamma(\beta_2-\beta_1)}+\dfrac{w}{r}(K\bar{x})^{\gamma\beta_2}$, 并且

$$D_1(K\bar{x})^{-\gamma\beta_1}+D_2(K\bar{x})^{-\gamma\beta_2}=\frac{w}{r}.\tag{33}$$

根据 $V(x)$ 在 $x=\bar{x}$ 处的连续性, 有

$$\frac{r-\frac{1}{2}\theta^2\beta_1}{\delta}D_1\bar{c}^{-\gamma(\beta_1+1)}+\frac{r-\frac{1}{2}\theta^2\beta_2}{\delta}D_2\bar{c}^{-\gamma(\beta_2+1)}+\frac{\bar{c}^{1-\gamma}}{K(1-\gamma)}-\frac{l}{\delta}=\frac{K^{-\gamma}}{1-\gamma}\bar{x}^{1-\gamma}.\tag{34}$$

由式(33) 和式(34) 可得关于 $\bar{x}$ 的代数方程式(19) . 　　证毕.

定理 3　最优策略 (c^*,π^*,τ^*) 分别为

$$c_t^*=\begin{cases}q, & (q-w)/r<X_t<\tilde{x},\\ \xi_t, & \tilde{x}\leqslant X_t<\bar{x},\\ KX_t, & \bar{x}\leqslant X_t,\end{cases}$$

$$\pi_t^*=\begin{cases}\dfrac{\theta}{\sigma_s(1-\alpha_2)}(X_t-\dfrac{q}{r}+\dfrac{w}{r})+\dfrac{X_t\sigma_p}{\sigma_s}, & (q-w)/r<X_t<\tilde{x},\\ \dfrac{\theta}{\sigma_s}(-\beta_1D_1\xi_t^{-\gamma\beta_1}-\beta_2D_2\xi_t^{-\gamma\beta_2}+\dfrac{\xi_t}{\gamma K})+\dfrac{X_t\sigma_p}{\sigma_s}, & \tilde{x}\leqslant X_t<\bar{x},\\ \dfrac{\theta}{\sigma_s\gamma}X_t+\dfrac{X_t\sigma_p}{\sigma_s}, & \bar{x}\leqslant X_t,\end{cases}$$

并且

$$\tau_t^*=\inf\{t\geqslant 0: X_t\geqslant\bar{x}\},$$

其中 ξ_t 是以下代数方程的解

$$X_t = D_1\xi_t^{-\gamma\beta_1} + D_2\xi_t^{-\gamma\beta_2} + \frac{\xi_t}{K} - \frac{w}{r}.$$

证明 根据 HJB 方程 (3) 的一阶条件与式(6)、式(7) , 以及定理 2 中的值函数 $V(x)$, 可得最优策略. 另由式(20), 可得代理人在时刻 t 的财富水平 X_t. 证毕.

4 数值分析

为了更好的理解财富水平和通胀因素对投资者的最优消费、投资组合和退休选择的影响, 在本节中, 结合定理 3, 相关数据参考 Lim [20], 在给定参数取值的基础上, 通过 Matlab 软件进行数值模拟(在一定的参数范围内该设定具有稳健性), 具体分析如下.

图 1 与图 2 分别表示财富水平 X_t 对消费和投资的影响. 分为3个阶段: $((q-w)/r, \tilde{x})$(最低生存消费), $[\tilde{x}, \bar{x})$(退休前)和$[\bar{x}, \infty)$(退休后). 设定参数为 $w = 0.4$, $l = 0.8$, $q = 0.05$, $R = 0.03$, $\delta = 0.07$, $\mu_s = 0.09$, $\sigma_s = 0.2$, $\mu_p = 0.035$, $\sigma_p = 0.065$, 在其他参数不变的情况下, 仅仅考虑相对风险厌恶系数 γ 影响下的最优消费与投资.

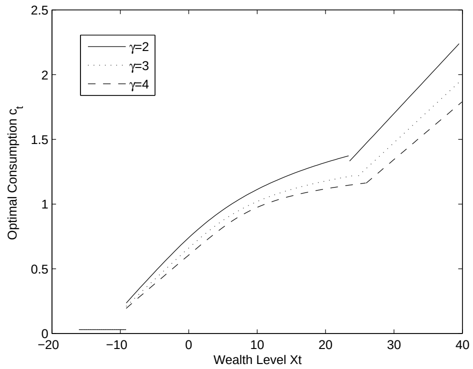


图 1 财富水平 X_t 对最优消费 c_t 的影响

Fig.1 Effect of wealth level X_t on optimal consumption c_t

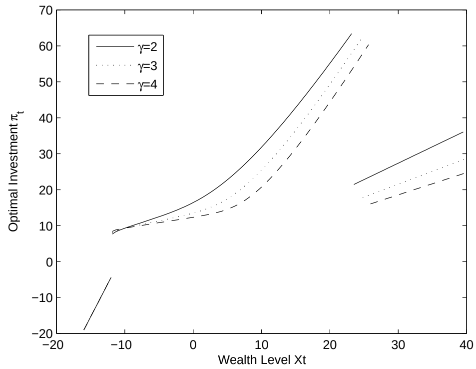


图 2 财富水平 X_t 对最优投资 π_t 的影响

Fig.2 Effect of wealth level X_t on optimal investment π_t

由图 1 可知, 首先, 在二、三这两个阶段随着财富水平的不断提高, 经济代理人的最优消费是呈现增长趋势的. 其次, 由图可知, 在第一段与第二段之间存在一个跳跃, 这是因为代理人通过固定工资收入累积了一定的财富后必然会改善自身消费水平, 导致消费上跳; 另外, 我们看到自愿退休也引起最优消费的跳跃, 这是因为代理人在退休之后, 没有了固定的工资收入, 故导致消费的下降. 最后, 增加相对风险厌恶系数可能会降低最优消费, 这是因为投资者对风险厌恶程度越高, 由于风险的存在效用就会越低, 体现在消费上就是减少消费, 这个时候应适当的控制消费.

由图 2 可知, 首先, 直观上来看, 随着财富的不断增加, 最优投资也是增加的. 其次, 在第一段与第二段之间存在一个跳跃, 这是因为代理人通过固定工资收入累积了一定的财富后必然会改善投资水平, 导致投资上跳, 此时财富水平为负, 有正的投资, 是因为代理人累积了一定的财富, 改变了投资, 但还是需要归还以前的借款; 另外, 我们看到自愿退休也引起最优投资一个向下的跳, 这是因为代理人在退休之后, 没有了固定的工资收入, 那么相应的投资策略就会随之改变. 最后, 相对风险厌恶系数越大时, 对于大多数风险厌恶者而言, 投资在风险资产上的比例就会越小, 这是理性的做法.

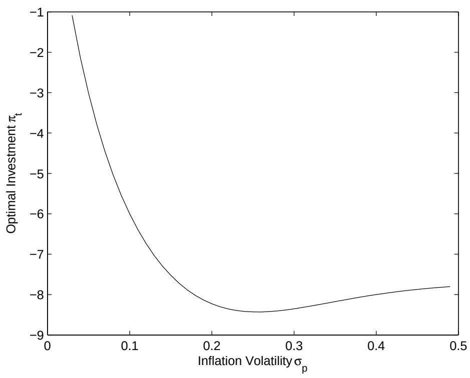
在图 3 中, 设定参数为 $w = 0.4$, $l = 0.8$, $q = 0.05$, $R = 0.03$, $\delta = 0.07$, $\mu_s = 0.09$, $\sigma_s = 0.2$, $\mu_p = 0.035$, 研究通胀波动率对最优投资的影响.

图 (3a) 表示代理人在最低生存消费的状态, 随着通胀波动率的增长, 会刺激并活跃市场, 代理人会借贷

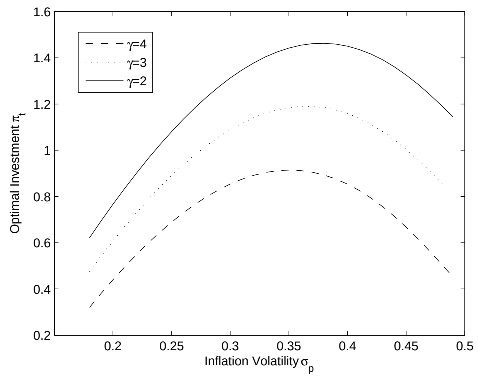
资金并且增加在风险资产上的投资; 之后随着通胀波动率的继续增大, 市场环境恶化, 代理人会放缓借贷投资的步伐, 逐渐减少在风险资产上的投资. 由于此段最优投资不受相对风险厌恶系数的影响, 故图形中只有一条曲线.

图 (3b) 表示在退休之前的状态. 首先, 从趋势上来看, 随着通胀波动率的增长, 代理人在风险资产上的投资先增加后渐渐减少. 这表明, 当通胀波动率在可控范围附近变动时, 投资者会将更多的资产投资于风险资产, 这样既能起到增值保值的作用, 同时也能一定程度上规避由于通货膨胀所带来的财富购买力下降的不利情况; 然而当通胀波动率较大时, 金融市场波动剧烈, 引起投资者对市场的担忧, 从而投资在风险资产上的头寸慢慢减少, 呈现下降趋势. 最后, 相对风险厌恶系数越大时, 对于大多数风险厌恶者而言, 投资在风险资产上的比例就会越小, 这是理性的做法.

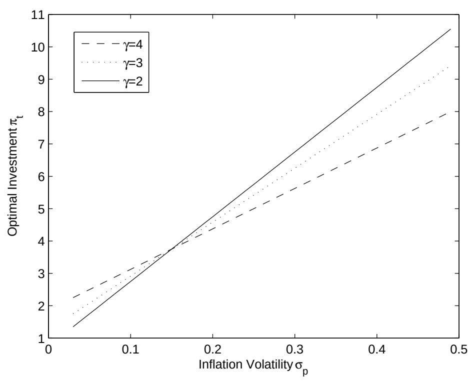
图 (3c) 表示在退休后的状态, 随着通胀波动率的增长, 经济代理人会一直增加在风险资产上的投资, 这是因为代理人退休后已经拥有足够的资金, 或可以通过投资风险资产来获取一定的收益. 由图形可以看出三条曲线会存在交叉, 这是因为随着通胀波动率的增长, 对风险厌恶不同的代理人投资策略的影响是不同的, 代理人对风险厌恶越大, 随着市场波动的幅度增加, 投资在风险资产上的比例就会越小, 在图中就呈现出较为平缓的增长, 而风险厌恶系数相对较小的代理人投资的曲线会比其陡峭.



(3a)



(3b)



(3c)

图 3　通胀波动率 σ_p 对最优投资 π_t 的影响

Fig.3　Effect of inflation volatility σ_p on optimal investment π_t

在图 4 中, 设定参数为 $w = 0.4, l = 0.8, q = 0.05, R = 0.03, \delta = 0.07, \mu_s = 0.09, \sigma_s = 0.2, \mu_p = 0.035$, 研究通胀波动率对最优消费的影响.

代理人在最低生存消费阶段, 由于一直维持着最低生存消费, 所以消费水平一直不变, 故此处省略图形.

图 4 表示代理人在退休前的状态, 结合图 (3b), 从投资者心理上考虑, 由于通胀的出现, 导致货币贬值, 财富购买力下降, 这时会降低投资者的消费欲望, 从而使得消费减少. 之后当通胀波动率超过某个值的时候, 这个时候市场不稳定因素增多, 投资人已经不愿意把过多的资产用于投资, 这样一来便有更多的资产可以用于消费; 同时由于通胀波动率的持续增长, 货币持续贬值, 越来越不值钱, 在这个过程中, 投资者对于这种现象的承受能力也在持续增长, 因此对消费的态度并不会像开始时那般抗拒, 会出现慢慢增长的趋势.最后, 当相对风险厌恶系数越大时, 投资风险资产的头寸就会变少, 相应的消费就会增多.

代理人在退休后的消费满足经典 Merton 模型, 符合一般的规律, 随着通胀波动率的增大, 消费会增加, 这是因为退休后代理人已经累积了足够的财富, 并可能通过投资取得了一定的收益, 从而有充足的资金用于消费.

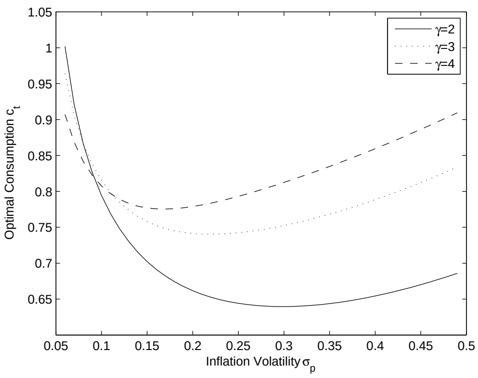


图 4 通胀波动率 σ_p 对最优消费 c_t 的影响

Fig.4 Effect of wealth level X_t on optimal consumption c_t

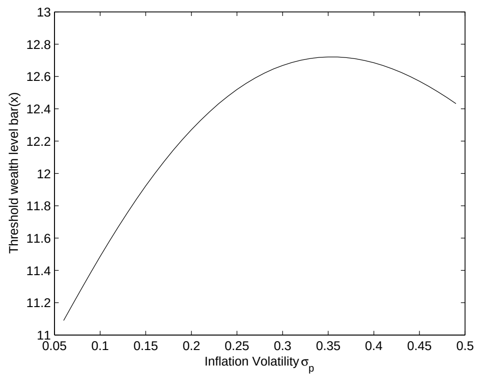


图 5 通胀波动率 σ_p 对临界财富水平 $\bar{x}$ 的影响

Fig.5 Effect of inflation volatility σ_p on threshold wealth level $\bar{x}$

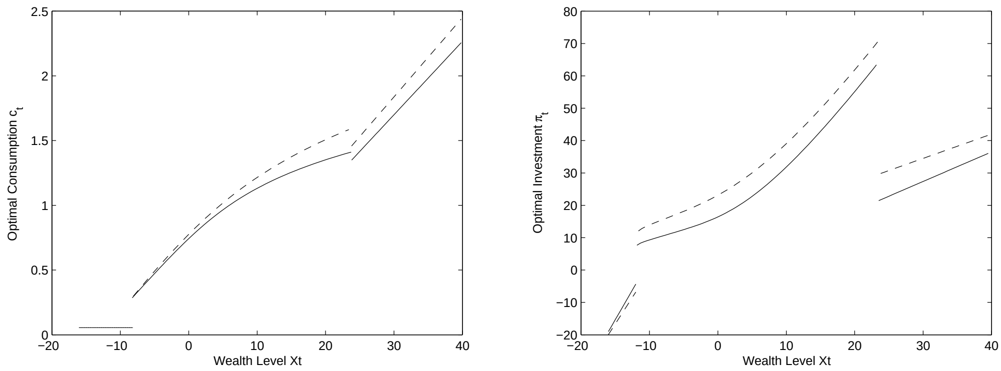
在图 5 中, 设定参数为 $w = 0.4, l = 0.8, q = 0.05, R = 0.03, \delta = 0.07, \mu_s = 0.09, \sigma_s = 0.2, \mu_p = 0.035$, 研究通胀波动率对最优退休时间的影响. 当财富水平达到 $\bar{x}$ 时, 代理人选择退休. 从趋势上来看, 随着通胀波动率的增长, 财富水平随之先增加后缓慢减少. 这表明, 由于通胀的出现, 导致货币贬值, 财富购买力下降, 且此时金融市场波动加剧, 所以, 代理人会在积累更多的财富之后才会选择退休. 然而当通胀波动率较大时, 代理人对于通胀因素带来的不确定性以及货币贬值这种现象的承受能力渐渐提升, 从而表现为不再进一步累积财富, 而是选择退休进而更早的享受闲暇带来的效用.

在图 6 中, 设定参数为 $w = 0.4, l = 0.8, q = 0.05, R = 0.03, \delta = 0.07, \mu_s = 0.09, \sigma_s = 0.2, \mu_p = 0.035$, $\sigma_p = 0.065$, 参考 Lim [20]的思路, 将考虑通胀因素与不考虑通胀情形下财富水平对最优消费、投资的影响进行比较. 其中实线表示考虑通胀因素, 虚线表示未考虑通胀(模拟时, 未考虑通胀的模型、公式参考 Lee 等 [17]).

图 (6a) 表示财富水平对最优消费的影响. 从图形中可以看出, 考虑通胀因素与不考虑通胀情形呈现出相同的趋势. 说明本文在考虑通胀的情况下具有一定的合理性. 与此同时, 不同的是, 在具有相同的财富水平时, 若存在通胀, 由图形可知, 代理人会减少消费, 这是因为通货膨胀会导致货币贬值, 购买力下降, 这时会降低投资者的消费欲望.

图 (6b) 表示财富水平对最优投资的影响. 从图形中可以看出, 考虑通胀因素与不考虑通胀情形呈现出相同的趋势. 与此同时, 不同的是, 在具有相同的财富水平情况下, 若存在通胀, 由图形可知, 代理人会减少投资, 这是因为通货膨胀会导致金融市场产生波动, 引起投资者对市场的担忧, 从而投资在风险资产上的头寸减少.

图 6 分析了考虑通胀因素与不考虑通胀情形下财富水平对最优消费、投资的影响, 发现本文考虑通胀因素情形的趋势与前人的研究有相似之处, 表明文章的研究具有一定的合理性; 且分析了不同之处, 使得文章又具有一定的创新与经济学意义.



(6a)　　(6b)

图6　财富水平 X_t 对最优消费 c_t 与投资 π_t 的影响

Fig.6 Effect of wealth level X_t on optimal consumption c_t and optimal investment π_t

5　结束语

将通胀因素、生存消费与退休选择三者结合起来, 是一类具有理论与现实研究价值的投资组合问题. 本文在通胀环境下建立模型, 并推导真实环境下的财富过程, 这更符合当前的金融市场, 具有现实意义. 借助动态规划方法和随机控制理论, 得出了投资者的最优消费投资与退休策略, 在文章最后通过数值模拟分别考虑了财富水平以及通胀波动率对经济代理人最优消费和投资的影响, 而且分析了通胀波动率对代理人最优退休时间的影响, 并将考虑通胀因素与未考虑通胀对代理人消费投资的影响进行了对比分析, 使得模型更加符合现实意义. 因此, 探讨通货膨胀环境下, 代理人带有生存消费约束的最优消费、投资与退休决策具有一定的现实经济意义和理论价值, 研究结果可以为投资者提供参考.

本文所作的研究通胀过程是基于几何布朗运动模型, 在后续的研究中, 将考虑通胀服从均值回复过程, 更有效的模拟现实市场.

参考文献:

[1] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. The Review of Economics and Statistics, 1969, 51(3): 247–257.

[2] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4): 373–413.

[3] Karatzas I, Lehoczky J P, Sethi S P, et al. Explicit solution of a general consumption/investment problem. Mathematics of Operations Research, 1986, 11(2): 261–294.

[4] Vila J L, Zariphopoulou T. Optimal consumption and portfolio choice with borrowing constraints. Journal of Economic Theory, 1997, 77(2): 402–431.

[5] Lakner P, Nygren L M. Portfolio optimization with downside constraints. Mathematical Finance, 2006, 16(2): 283–299.

[6] Gong N, Li T. Role of index bonds in an optimal dynamic asset allocation model with real subsistence consumption. Applied Mathematics and Computation, 2006, 174(1): 710–731.

[7] Shin Y H, Lim B H, Choi U J. Optimal consumption and portfolio selection problem with downside consumption constraints. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188(2): 1801–1811.

[8] 常　浩, 荣喜民. 借贷利率限制下的效用投资组合. 系统工程学报, 2012, 27(1): 26–34.
Chang H, Rong X M. Utility portfolio selection with different interest rates for borrowing and lending. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(1): 26–34. (in Chinese)

[9] 康志林, 曾　燕. Minimax准则下带约束的最优投资组合策略. 系统工程学报, 2012, 27(5): 656–667.
Kang Z L, Zeng Y. Optimal portfolio strategy under minimax criterion with constraints. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(5): 656–667. (in Chinese)

[10] 王　华, 赵　慧, 荣喜民. 周期风险模型下的保险基金最优投资研究. 系统工程学报, 2012, 27(6): 797–805.
Wang H, Zhao H, Rong X M. Optimal investment for an insurer with periodic risk model. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(6): 797–805. (in Chinese)

[11] 史敬涛. 相关随机干扰下不连续股价的最优消费投资决策. 系统工程学报, 2014, 29(2): 182–191.
Shi J T. Optimal consumption investment decisions of discontinuous stock prices under correlated random disturbances. Journal of Systems Engineering, 2014, 29(2): 182–191. (in Chinese)

[12] Choi K J, Shim G. Disutility, optimal retirement, and portfolio selection. Mathematical Finance, 2006, 16(2): 443–467.

[13] Farhi E, Panageas S. Saving and investing for early retirement: a theoretical analysis. Journal of Financial Economics, 2007, 83(1): 87–121.

[14] Choi K J, Shim G, Shin Y H. Optimal portfolio, consumption-leisure and retirement choice problem with CES utility. Mathematical Finance, 2008, 18(3): 445–472.

[15] Fei W Y. Optimal consumption-leisure, portfolio and retirement selection based on α-maxmin expected CES utility with ambiguity. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2012, 27(4): 435–454.

[16] 刘宏建, 费为银, 朱永王, 等. Knight不确定下考虑保险和退休的最优消费–投资遗产问题研究. 运筹学学报, 2014, 18(3): 88–98.
Liu H J, Fei W Y, Zhu Y W, et al. Optimal consumption-portfolio and bequest with insurance and retirement under Knighting uncertainty. Operations Research Transactions, 2014, 18(3): 88–98. (in Chinese)

[17] Lee H S, Shin Y H. An optimal consumption, investment and voluntary retirement choice problem with disutility and subsistence consumption constraints: A dynamic programming approach. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 428(2): 762–771.

[18] Brennan M J, Xia Y. Dynamic asset allocation under inflation. The Journal of Finance, 2002, 57(3): 1201–1238.

[19] Siu T K. Long-term strategic asset allocation with inflation risk and regime switching. Quantitative Finance, 2011, 11(10): 1565–1580.

[20] Lim B H. The effect of inflation risk and subsistence constraints on portfolio choice. Journal of the Korea Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013, 17(2): 115–128.

[21] 姚海祥, 姜灵敏, 马庆华. 考虑通货膨胀因素下的连续时间均值–方差投资组合选择. 控制与决策, 2012, 28(1): 43–48.
Yao H X, Jiang L M, Ma Q H. Continuous-time mean-variance portfolio selection under inflation. Control and Decision, 2012, 28(1): 43–48. (in Chinese)

[22] 费为银, 李淑娟. Knight不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究. 工程数学学报, 2012, 29(6): 799–806.
Fei W Y, Li S J. On study of optimal consumption and portfolio with inflation under Knightian uncertainty. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2012, 29(6): 799–806. (in Chinese)

[23] 梁　勇, 费为银, 唐仕冰, 等. Knight不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资问题研究. 数学杂志, 2014, 34(2): 335–344.
Liang Y, Fei W Y, Tang S B, et al. On study of optimal investment with inflation under Knight uncertainty and regime-switching. Journal of Mathematics (PRC), 2014, 34(2): 335–344. (in Chinese)

[24] 费为银, 夏登峰, 刘　鹏. 模型不确定和极端事件冲击下带通胀的最优投资组合选择问题研究. 应用概率统计, 2014, 34(2): 335–344.
Fei W Y, Xia D F, Liu P. An investor's optimal portfolio with rate events and model uncertainty under inflation. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2014, 34(2): 335–344. (in Chinese)

[25] 费为银, 吕会影, 余敏秀. 通胀服从均值回复过程的最优消费和投资决策. 系统工程学报, 2014, 29(6): 791–798.
Fei W Y, LüH Y, Yu M X. Decision making for optimal consumption and portfolio under inflation with mean-reverting process. Journal of Systems Engineering, 2014, 29(6): 791–798. (in Chinese)

[26] 费为银, 蔡振球, 夏登峰. 跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置. 管理科学学报, 2015, 18(8): 83–94.
Fei W Y, Cai Z Q, Xia D F. Dynamic asset allocation with inflation under jump-diffusion environment. Journal of Management Science in China, 2015, 18(8): 83–94. (in Chinese)

[27] 费为银, 李允贺, 夏登峰. 通胀下带激励的对冲基金最优投资. 系统工程理论与实践, 2015, 35(11): 2740–2748.
Fei W Y, Li Y H, Xia D F. Optimal investment strategies of hedge funds with incentive fees under inflationary environment. Systems Engineering: Theory & Practice, 2015, 35(11): 2740–2748. (in Chinese)

作者简介:

费为银 (1963—), 男, 安徽芜湖人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融数学与金融工程, 随机控制, Email: wyfei@ahpu.edu.cn;

陈雅豪 (1993—), 男, 安徽合肥人, 硕士生, 研究方向: 金融工程, Email: 550469983@qq.com;

费　晨 (1993—), 女, 安徽芜湖人, 博士生, 研究方向: 金融系统工程, Email: 438014575@qq.com.