

影院座位的安排

刘学智

武汉大学电气工程学院 武汉 430072

Email: newyouthliu@163.com

摘要: 本文用直线夹角公式导出了最大视角公式, 从离散化的思想出发, 经过一系列的条件简化, 在主要考虑影响满意度的视角因素的基础上, 用数列求和定义了平均视角函数, 对地板线倾角以步长 0.1 度搜索最优解, 求得倾角为 17.4 度时平均视角最大为 5.75 度, 其中第 1 排视角最大 (8.8 度), 最佳位置需根据给出影响满意度因素的权值具体来定, 一般是前 1、2 排居中位置。

关于如何进一步提高观众满意度, 本文搜索了包络线是直线时的情况, 当倾角为 7.1 度, 第 1 排、最后一排的地板线高度分别为 1.8m、3.4m 时, 平均视角最大为 5.92 度, 其中第 1 排视角最大 (10 度)。

模型推广中, 本文考虑了观众座高不等这一随机因素给理想模型带来的影响, 并考虑了空间设计的问题。

关键词: 视角 平均满意度 数列求和 包络线

1. 问题重述

下图 1 为电影院的剖面图, 座位的满意程度主要取决于两个因素: (1) 视角 θ , 即观众眼睛到屏幕上、下边的视线的夹角, θ 越大越好。(2) 仰角 ω , 即观众为看见屏幕上边需上仰头部的角度, ω 太大, 观众有不舒适感, 一般要求 $0^\circ \leq \omega \leq 30^\circ$ 。

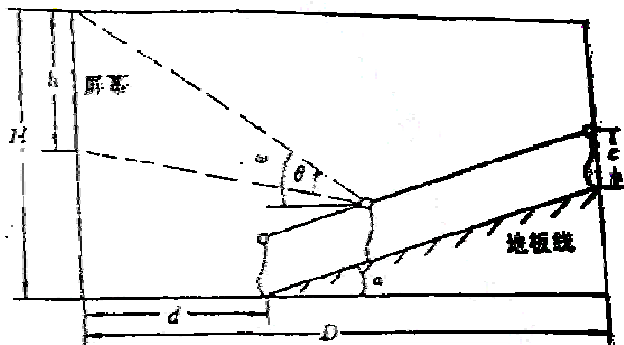


图 1 电影院的剖面图

记地板线倾角为 α , 第一排座位在离屏幕 d 处。最后一排在离屏幕 D 处, C 为观众坐高。

1、已知参数 C, d, D, H, h 和 α , 问最佳座位在何处 (用上述参数表示)? 并讨论这些参数应满足什么条件你的结果才合理?

2. 已知下表 1 数据: 试求出地板线倾角 α , 使所有观众的平均满意度最大, 并给出相应的最佳座位的位置。

3. 问地板线设计成什么形状, 可以进一步提高观众的满意度?

表 1 参数数据 (单位: m)

H	h	d	D	c
4.50	1.20	5.91	18.81	1.10

2. 基本假设

1. 所有观众的座高相等。
2. 各排的排距相等。

3. 所有观众的视力相差不大。
4. 考虑到实际影院的地板是呈阶梯状的，图 3 中的地板线可看作这些阶梯的包络线。
5. 观众可以俯视，但不能达到俯视屏幕的上边缘的程度。

用到的几个数据

- ①臀部—膝盖长度是从臀部最后面到膝盖骨前面的水平距离^[1]，影响到排距的取值，本文排距取 0.8m ^[2]。
- ②眼睛—头顶长度是从眼睛到头顶的竖直距离。本文取 0.1m 。

3. 符号说明

n	影院座位的排数
l	两排座位之间的距离，简称排距
x	观众到屏幕的水平距离
θ	视角
α	地板线的倾角
ω	仰角
c	观众座高
$\bar{\theta}$	所有观众的平均视角

其它相关符号用到时文中会说明，其中 H 、 h 、 d 、 D 在图 1 中已标出。

4. 问题分析

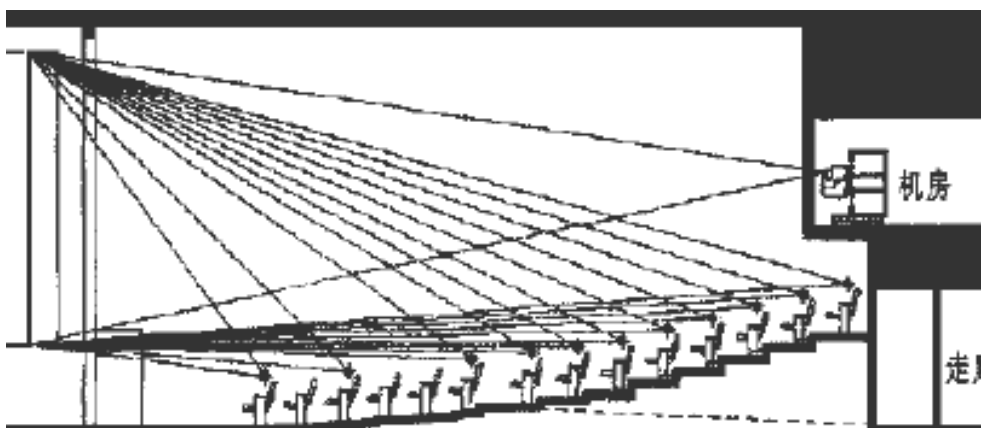


图 2 阶梯式影院剖面图

每一个到影院的观众都想坐在最佳位置，而座位的满意程度主要取决于下面几个因素：

- ①视角 θ ，即观众眼睛到屏幕上、下边的视角的夹角 θ 越大越好。
- ②仰角 ω ，即观众为看见屏幕上边需上仰头部的角度， ω 太大，观众有不舒适感，一般要求 $0^\circ \leq \omega \leq 30^\circ$ 。

- ③观众距屏幕的水平距离不能太远，会看不清。

我们知道视角要越大越好，仰角而越小越好，最佳位置就是要在这两者之间找到一个契合点，使观众对两者的综合满意程度达到最大。针对这个问题，我们通过主观的判断分别对水平视角和仰角取权重。如果仰角在满足条件的范围内，我们假定观众满意程度只取决于视角。其中③对所有观众的平均满意程度基本不造成影响，本文将忽略此因素的影响。另外少数身高很高的人会挡住别人的视线，本文也将忽略此因素的影响。

5. 模型建立

问题 1

如图 3 以地面水平方向为 x 轴，屏幕处垂直方向为 y 轴建立直角坐标系。设屏幕最上点为 A ，最下点为 B ，观众眼睛所在点为 E 。

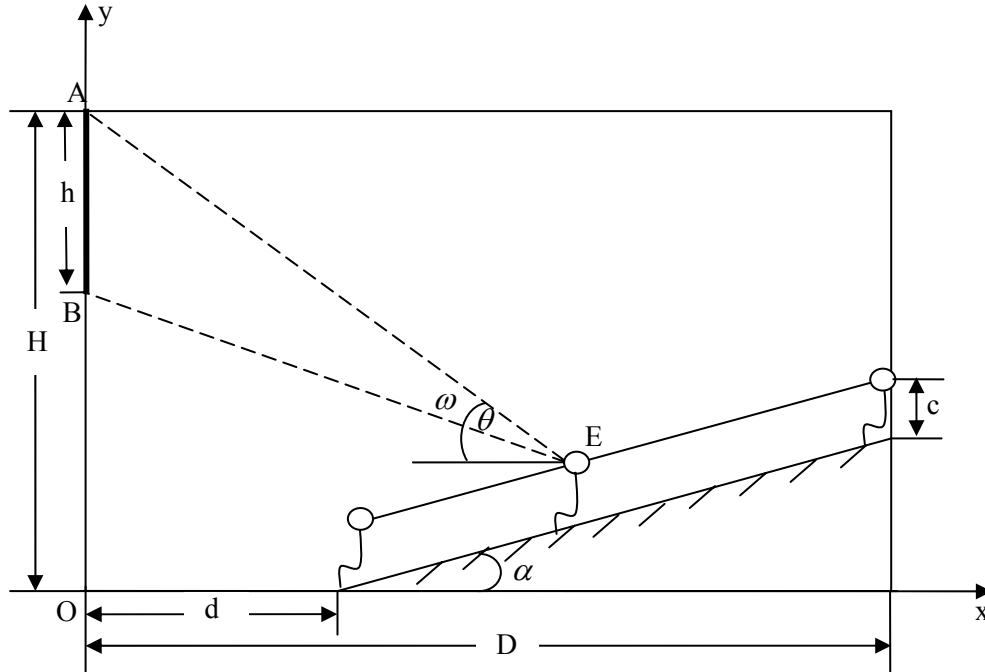


图 3 影院剖面的坐标系图

则 $A(0, H)$ ， $B(0, H-h)$ ， $E(x, (x-d)tg\alpha+c)$ ($x \in [d, D]$)。设 AE 的斜率为 k_1 ， BE 的

斜率为 k_2 ，则它们的夹角 θ 满足公式： $tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ ，此处，

$$k_1 = \frac{(x-d)tg\alpha + c - H}{x}, \quad k_2 = \frac{(x-d)tg\alpha + c - H + h}{x}, \quad \text{其中 } -k_1 = tg\omega \quad (\omega \text{ 为仰角}).$$

$$\therefore tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{h/x}{1 + (xtg\alpha - dtg\alpha + c - H)(xtg\alpha - dtg\alpha + c - H + h)/x^2}$$

令 $H + dtg\alpha - c = M$ ，则

$$tg\theta = \frac{h}{(tg^2\alpha + 1)x + (M^2 - hM)/x + htg\alpha - 2Mtg\alpha}$$

\therefore 倾角 $\omega \in [0^\circ, 30^\circ]$ ，

$$\therefore 0 \leq tg\omega \leq \sqrt{3}/3 \Rightarrow 0 \leq -k_1 = -\frac{(x-d)tg\alpha + c - H}{x} \leq \sqrt{3}/3$$

$$\therefore \frac{M}{\sqrt{3}/3 + \operatorname{tg}\alpha} \leq x \leq \frac{M}{\operatorname{tg}\alpha}$$

于是关于视角的目标函数及约束条件可表示为：

$$\begin{aligned} \text{MAX } \theta &= \operatorname{arctg} \frac{h}{(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)x + (M^2 - hM)/x + \operatorname{htg}\alpha - 2M\operatorname{tg}\alpha} \\ \text{s.t. } &\begin{cases} d \leq x \leq D \\ \frac{M}{\sqrt{3}/3 + \operatorname{tg}\alpha} \leq x \leq \frac{M}{\operatorname{tg}\alpha} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

由于一般情况下， $M^2 - hM > 0$ ，

所以若 θ 的极值点 $x = \sqrt{\frac{M^2 - hM}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \sqrt{M^2 - hM} \cos\alpha > d$ ，则函数在该点取得最大值；

若 $\sqrt{M^2 - hM} \cos\alpha \leq d$ ，则函数在 $x = d$ 处取得最大值。

即最大视角 θ_{\max} ：

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{h}{2(M^2 - hM)/\cos\alpha + \operatorname{htg}\alpha - 2M\operatorname{tg}\alpha}, & d < \sqrt{M^2 - hM} \cos\alpha \leq D \\ \operatorname{arctg} \frac{h}{(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)d + (M^2 - hM)/d + \operatorname{htg}\alpha - 2M\operatorname{tg}\alpha}, & \sqrt{M^2 - hM} \cos\alpha \leq d \end{cases} \quad (2)$$

最佳座位取决于观众对影响满意度 2 个主要因素的权值，设权值分别为 λ_1, λ_2 。对于因素②，不妨设其满意度与仰角 ω 大小成反比，即

$1/\omega(x) = 1/\operatorname{arctg} \frac{(x-d)\operatorname{tg}\alpha + c - H}{x}$ 。所以最佳座位为满足 $\min\{\lambda_1\theta(x) + \lambda_2/\omega(x)\}$ 的 x 值。对这几个因素结合实际经验综合分析可估计最佳位置一般在偏前面几排的居中位置。

问题 2

考虑到眼睛到头顶的距离，第一问的公式需修正， c 值减去 0.1。要求所有观众的平均满意度，先考虑观众的仰角情况。检查第一排的观众是否满足仰角条件，由表 1 数据，

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{4.50 - 1.10}{5.91} \approx 29.9^\circ < 30^\circ, \text{ 即不论地板线倾角 } \alpha \text{ 大小, 所有观众都满足仰角条件,}$$

且从前排到后排，仰角依次减小。于是我们再考虑影响观众满意度的视角因素，可以求所有观众的平均视角。若用积分的方法，有些不符合实际，因为影院座位的排数是很有限的。由表 1 数据， $D - d = 12.9$ ，而排距假设为 0.8m，排数 $n = 12.9/0.8 = 16.1$ ，于是我们不妨取排数为 16 进行计算。

于是我们用函数数求和的方法求所有观众的平均视角 $\bar{\theta}$ ，

$$\bar{\theta}(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_v(il) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} \frac{h}{(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)il + (M^2 - hM)/il + \operatorname{htg}\alpha - 2M\operatorname{tg}\alpha} \quad (3)$$

由于 $\bar{\theta}(\alpha)$ 是变量 α 的复杂函数，不能用一般求导的方法求极值。我们可采用搜索的方法，取 α 角的步长为 0.1° ，由于 α 最大值为

$$\alpha_{\max} = \arctg \frac{H-c}{D-d} = \arctg \frac{4.50-1.1}{18.81-5.91} \approx 14.7^\circ$$

可取 α 的搜索范围 $0^\circ \sim 14.7^\circ$ ，计算每个 α 角对应的 $\bar{\theta}(\alpha)$ ，最大的 $\bar{\theta}(\alpha)$ 对应的 α 角即为所求。可通过 Matlab 编程实现（具体程序见附录）。

编程求得最大平均视角为 5.75° ，对应的倾角 α 角为 14.7° 。由于 $\sqrt{M^2 - hM} \cos \alpha = 4.17 < d$ ，根据公式(2)，所以最大视角在 d 处，即第1排大小为 8.8° 。可见越靠前排，平均视角越大，但同时仰角越大，两者相互矛盾，至于最佳座位位置，与第1问一样需通过权值来定。平均视角与地板线倾角的关系曲线如图4，由图可知一定范围内倾角越大，平均视角越大。

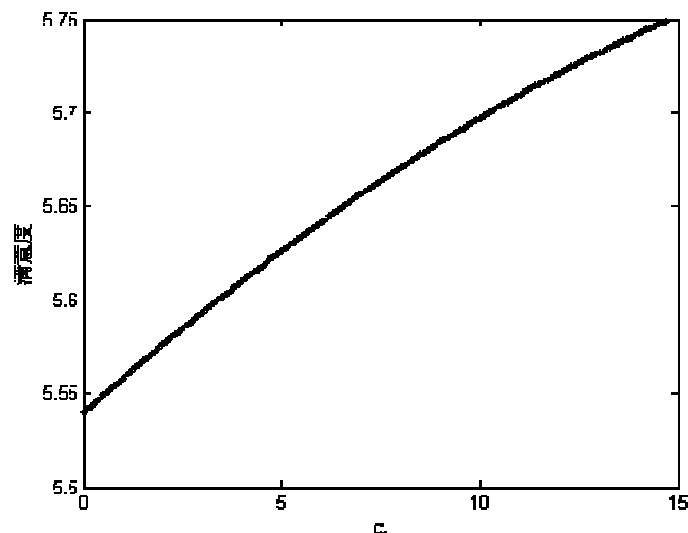


图4 平均视角与地板线倾角的关系曲线

问题3

地板线不管设计成什么形状，各排的间距不变，区别在于各排的高度差如何变化。不难证明：

引理 垂直方向上的两定点，在与它们相距一定水平距离的垂直方向上有一动点，当该动点位于两定点的垂直平分线上时，动点与两定点形成的视角最大。动点距两定点的垂直平分线越近，动点与两定点形成的视角越大。证明见附录。

于是似乎地板线设计成水平面，高度为 $H-h/2$ ，即屏幕的垂直平分线，这样所有点的视角都最大。但实际上某人的视角范围内有其他人时，视角就要减小，如上述水平面，只有第一排观众视角最大，其它排的视角为其一半，若考虑眼睛到头顶的高度，则视角更小。可见，第1排观众的高度不能超过屏幕下边缘的高度，否则后面的人就会被挡住。

也就是说座位要尽量接近屏幕的中垂线，且要尽量防止前排观众挡住后排观众的一部分视线（可通过增加排间高度差来实现）。这正好验证了第2问的结论，地板线倾角（ 14.7° ）最大时，平均视角最大，因为这样才能使所有的点距屏幕中垂线最近。

那么如何进一步提高观众的满意度呢？考虑到屏幕中垂线处视角最大，可采取抬高各排

座位的高度的措施。

(I) 各排的排间高度差相等时, 则包络线为直线。

考虑眼睛到头顶的距离, 若后排不被前排挡住视线, 则地板线倾角至少为 $\alpha = \arctg \frac{0.1}{0.8} = 7.1^\circ$ 。经过分析最大平均视角只可能在如下情况发生: 最后一排观众的高度范围 $H - h/2 \sim H$, 地板线倾角范围 $7.1^\circ \sim 14.7^\circ$ 。可对变化范围内的情况进行搜索找到最优解。设最后一排的坐标 (D, y_D) , 列出直线方程: $y - y_D = tg\alpha(x - D)$, 于是观众眼睛位置可表示为 $(x, (x - D)tg\alpha + y_D)$ 。可进行与第 2 问类似的搜索 (具体 C 语言程序见附录), 求得最大平均视角 $\bar{\theta} = 5.92^\circ$, $y_D = 4.5$, 倾角 $\alpha = 7.1^\circ$, 第 1 排视角最大等于 10° 。座位安排的效果示意图如图 5。

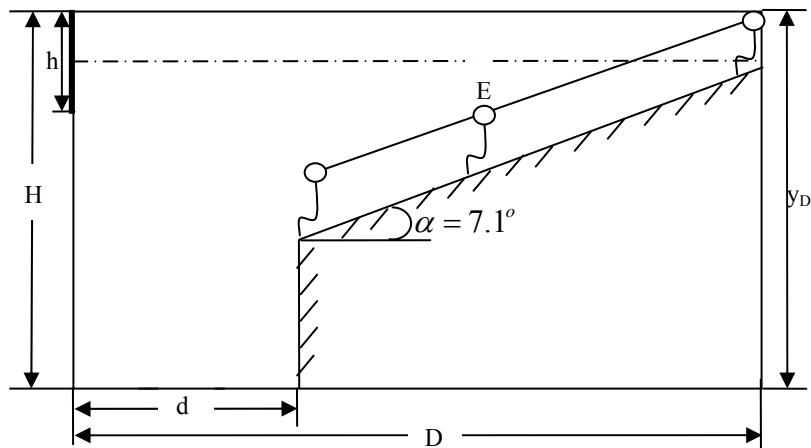


图 5 设计的地板线形状图

(II) 各排的排间高度差不等时, 则包络线为曲线。

求什么样的曲线使平均视角最大, 这属于泛函问题, 是十分棘手的问题。考虑到即使经过大量数值简化计算 (如假设为抛物线) 也不一定能比 (I) 进一步提高平均满意度, 且按这样的方案施工起来并不方便, 本文没有进一步深入讨论下去。

6. 模型推广

不难看出两排的高度差越大, 后排观众被挡住视线的概率越小。由表 1 数据可求出倾角最大时排间高度差为 $ltg\alpha_{\max} = 0.8 \times tg14.7^\circ = 0.21\text{m}$ 。而眼睛到头顶距离 0.1m , 若前面观众比后面观众座高长 0.11m , 后排观众就会被挡住视线。

实际生活中人的身高 (或座高) 一般呈正态分布, 少数较高或较矮的约占总数的 5%。但只有高的会挡住别人的视线, 假设占 2.5%, 这些人随机均匀分布在影院的各个位置。影院没有必要为这部分因素增加额外的排间高度差。排间高度差 (地板线倾角) 可结合屏幕的悬挂位置、人座高的正态分布 (正态分布的 3σ 原则)、人眼到头顶的距离等因素综合考虑。

若从空间角度思考, 可将弧型排列座位, 以保证观众可正对银幕。还可将影院设计成两边高、中间低的形状, 这样两侧的观众能获得更大空间视角, 还能减少前排观众挡住后排观

众的概率。另外，从银幕到第一排座位的距离应该最少是银幕宽度的一半^[3]，以保证观众的水平视角不超过90°，便于聚光。

参考文献

- [1] http://source.eol.cn/gjpxw/thudz/GD_jzsj_006/chapter2/2-1-32.htm.
 [2] 邱正选. 现代电影院设计中几个问题的探讨. 中国电影市场. 2003年9期
 [3] 李敬 王林杰. 影厅工艺设计要点[J]. 影视技术. 2000年05期.

The arrangement of cinema seat

Liu Xuezhi

School of Electrical Engineering, Wuhan University

Abstract: This paper clipped the beeline inclination formula to lead the biggest angle of view formula with the straight line, from the thought of discretization set out, through a series of condition simplification, using sum for a sequence of number to define average angle of view function with the few rows in mainly considering the foundation of the angle of view factor of influence the satisfaction, to the floor line's obliquity with trod to grow 0.1 degrees to search the superior solution, the average angle of view was the biggest for 5.75 degrees while begging the obliquity as 17.4 degrees, among them one row angle of view was the biggest(8.8 degrees), the best position needed a basis the influence satisfaction factor to of the power value was concrete to settle, generally is front 1,2 lines of in the centers position.

Concerning how raise the audience satisfaction further, this text's searching to wrap the 终 line is straight line of circumstance, be the obliquity is 7.1 degrees,1 row, the last row of floor line highly distinguish for 1.8 ms,3.4 ms, average the angle of view is the biggest for 5.92 degrees, among them one row angle of view is the biggest(10 degrees).

In the model expansion, these papers considered the audience's height's influence that this random factor brings ideal model, and consider the problem of the space design.

Keyword: angle of view average satisfaction sum for a sequence of number envelope of family of curves

附录

1 关于引理的简证

如右图 5，设 $A(0, y_1)$ ， $B(0, y_2)$ ，

$C(c, y)$ ，则直线 BC、AC 的斜率分别为

$K_{BC} = \frac{y - y_2}{c}$ ， $K_{AC} = \frac{y - y_1}{c}$ ，它们的夹

角 θ 满足：

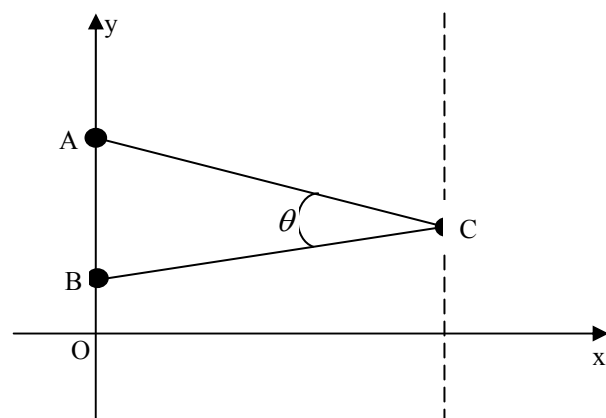


图 6

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{K_{BC} - K_{AC}}{1 + K_{BC}K_{AC}} = \frac{(y_1 - y_2)c}{c^2 + (y - y_1)(y - y_2)}$$

可知当 $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $\operatorname{tg}\theta$ 取得极值。

2 求第 2 问最大平均视角的 M 文件

```

l=0.8;H=4.50;h=1.20;d=5.91;D=18.81;c=1.10-0.1;
max=0;
for aa=0:.1:14.7
    a=aa/180*pi;
    S=0; M=H+d*tan(a)-c;
    for i=1:16
        x=d+i*1;
        temp=h/((tan(a)*tan(a)+1)*x+(M*M-h*M)/x+h*tan(a)-2*M*tan(a));
        jiao=atan(temp)/pi*180;
        S=S+jiao;
    end
    S=S/16;
    fprintf(' %f,%f\n', S, aa);
    if(S>max)
        max=S;%max是最大满意度
        maxa=aa;%maxa是最大满意度对应的a角
    end
end
max
maxa

```

3 求第 2 问最大平均视角的 C 文件

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define pi acos(-1)
int main()
{
    int i;
    double max=0, temp, jiao, S, a, aa, M, x, maxa, yd, maxyd;
    double l=0.8, H=4.50, h=1.20, d=5.91, D=18.81;
    for(yd=3.9;yd<=4.5;yd+=.1)
    {
        for(aa=7.1;aa<=14.7;aa+=0.1)
        {
            a=aa/180*pi;
            S=0; M=H+D*tan(a)-yd;
            for(i=1;i<=16;i++)
            {

```



```
x=d+i*1;
temp=h/((tan(a)*tan(a)+1)*x+(M*M-h*M)/x+h*tan(a)-2*M*tan(a));
jiao=atan(temp)/pi*180;
S=S+jiao;
}
S=S/16;
printf("%lf,%lf\n",S,aa);
if(S>max)
{
    max=S;//最大视角
    maxa=aa;//对应的倾角
    maxyd=yd;//对应最后一排的高度
}
}
}
printf("max=%lf,maxa=%lf,maxyd=%lf\n",max,maxa,maxyd);
}
```