

VaR 的一种模拟方法

A Simulation Method for Value at Risk

吉林大学商学院 陈守东

摘要 在险价值作为一种风险管理的方法，到目前为止已成为国际范围内普遍使用的风险管理技术。本文严格定义了在险价值，并使用概率规划提供了确定最小价值的模型，同时给出了一种模拟方法。

关键词 在险价值 概率规划 模拟方法

Abstract Value at risk is risk management method. Up to now, it be applied to financial risk management widely in the world. This paper, we define Value at risk strictly. Provide a probability programming model for determine minimum risk Value, as same as, give a simulation method.

Key words Value at risk probability programming Simulation method.

一、引言

根据马柯维兹的组合投资理论，投资者可以通过分散投资以消除非系统风险。由于投资者拥有的是多种资产的组合，所以必须着眼于整个资产组合的收益与风险的度量，而不只是关注个别的资产。对于风险的度量，人们的认识是在不断的深化，从最初的方差，相关系数，协方差，到 β —系数、 δ 、 γ ，乃至近些年发展起来的在险价值 VaR 都为风险的管理提供了量化的基础。特别是在在险价值被巴塞尔银行监管委员会，美国联邦储蓄银行以及欧盟的金融监管当局认为是一种可以接受的风险测定方法。

所谓的在险价值，它是在正常的市场条件下和给定的置信水平下，金融参与者在给定的时间区间内的最大期望损失值，它被巴塞尔委员会推荐为一种允许金融机构使用作为内部风险管理模型来决定资产的监管要求量的新方法。并明确建议以内部风险模型所计量出的在险价值，作为风险量的度量标准。

文献[1]及相关的研究，介绍了近些年有关 VaR 研究发展状况和应用方法，但对投资组合的最小价值或最小收益率没有给出明确的表达式和其确定方法。本文引用在险价值的概念，严格定义了投资组合的最小价值或最小收益率，并给出了确定他们的概率规划模型，同时讨论了一般分布下的在险价值的模拟方法。

二、风险价值

在险价值比较规范的定义是：在正常市场条件下和一定置信水平上，任何一种金融工具和品种未来一定时间内预期发生的最坏情况的损失。这里有两个参数，一是未来一定时间，这个时间可以是一天，二天，一个月或二个月。一般地目标期间应与投资组合正常调整的最长时间一致，所以它由证券的流通性，即完成正常交易量的时间等方面去确定。第二个参数是正常市场条件，在 VaR 系统中包含的条件范围非常广泛，大致可分为经济条件、市场趋势、行业、信誉等，但最重要的是概率条件，即可信度或置信水平。特别置信水平大或高，在险价值就越大。下面我们介绍如何度量在险价值。

对于一个投资组合，如果， W_0 是期初投资， r 是收益率，则在期末组合的价值为 $W = W_0(1+r)$ 。因为存在风险，所以收益率 r 和组合的价值 W 都是随机变量，记 $Er = \mu$ ， $Dr = \sigma^2$ ， $\sqrt{Dr} = \sigma$ 是标准差（又称为波动率）， EW 是 W 的预期值。定义 W_C 是给定置信水平 C 投资组合 W 的最小值，记为 $W_C = \min\{\tilde{W} \mid P(W > \tilde{W}) = 1 - C\}$ ，则有 $W_C = W_0(1+r_C)$ ，其中 r_C 是在置信水平 C 下组合的最小收益率。

定义 1：组合 W 的在险价值 VaR 为相对于组合预期价值在给定置信水平 C 之下的损失值，即

$$VaR = EW - W_C = W_0(1 + \mu) - W_0(1 + r_C) = -W_0(r_C - \mu)$$

有时， VaR 也定义为相对于 $\mu = 0$ 在给定置信水平 C 之下的绝对损失值，即

$$VaR(0) = W_0 - W_C = -W_0 r_C$$

显然在计算 VaR 值时，需要确定 W_C 或 r_C ，

命题 1： W_C ， r_C 分别可表示为下述概率规划

$$\begin{array}{ll} \min \tilde{W} & \min \tilde{r} \\ \text{s.t. } P(W > \tilde{W}) \geq 1 - C & \text{s.t. } P(r > \tilde{r}) \geq 1 - C \end{array}$$

之解。

因为从极小化的目标值 \tilde{W} 的观点看，所要求的目标值 W_C 可以在保证置信水平至少是 C 时，所取的最小值即可。记

$$W_C = \min\{\tilde{W} \mid P(W > \tilde{W}) \geq 1 - C\}$$

$$r_C = \min\{\tilde{r} \mid P(r > \tilde{r}) \geq 1 - C\}$$

当已知 r 概率分布为 $N(\mu, \sigma^2)$ 时，用 $f(r)$ 表示密度， $\Phi(x)$ 表示标准正态分布累积函数，则 r_C 满足

$$C = \int_{r_C}^{+\infty} f(r)dr \Leftrightarrow 1 - C = P(r \leq r_C)$$

$$\Leftrightarrow 1 - C = P\left(\frac{r - \mu}{\sigma} \leq \frac{r_C - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{r_C - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_C - \mu}{\sigma} = -\alpha \Rightarrow r_C = -\alpha\sigma + \mu$$

三、VaR 的一种模拟方法

当 W 为服从一般概率分布的随机变量时，设 $f(W)$ 是投资组合未来价值的 W 概率分布密度函数，给定 C ，则 \tilde{W} 满足

$$1 - C = \int_{\tilde{W}}^{+\infty} f(W)dW \Leftrightarrow C = \int_{-\infty}^{\tilde{W}} f(W)dW = P(W \leq \tilde{W})$$

此时采用如下的随机模拟：

从 W 的概率分布 $F(W)$ 中生成 N 个独立随机变量 $W_i, i = 1, \dots, N$ ，生成方法可能采用 *Monte Carlo* 模拟。得到序列 $\{\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N\}$ ，其中 $\tilde{r}_i = W_i(x) \quad i = 1, \dots, N$ ，取 N' 为 $(1-C)N$ 的整数部分，由大数定律，序列 $\{\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N\}$ 中的第 N' 个最小的元素即为 W_C 的估计值。

对 W_C 的检验：首先从概率分布 $F(W)$ 中产生 N 个独立同分布随机变量 $W_i, i = 1, \dots, N$ ，设 N' 是 N 次试验中 $W_i(x) < W_C, i = 1, \dots, N$ 的次数，即所产生的随机变量中满足约束条件的个数，由大数定律，可用 $\frac{N'}{N}$ 估计概率，因此， W_C 是解 $\Leftrightarrow \frac{N'}{N} \geq 1 - C$ 。

对于金融机构的资产/负责管理而言，在计算风险价值时，要求计算包括资产负债表外的或有负责的风险价值，在险价值即然是有一定置信水平可能低于预期价值的风险暴露，当然也就要求金融机构具备抗御风险的能力，要求合理机构有足够的抗风险的储备来对付可能发生的损失。

参 考 文 献

1. Philippe Jorion, 《Value at Risk: the New Benchwark for controlling Market Risk》，The McGraw-Hill companies, ImC., 1997。

2. 刘宝碇，赵瑞清，《随机规划与模糊规划》，清华大学出版社，1998。