

数值法计算型钢构件弹塑性弯扭屈曲临界弯矩

林珑¹, 王子楠²

1. 辽宁工程技术大学土木工程学院, 辽宁阜新(123000)

2. 辽宁省阜新市时代建筑设计院, 辽宁阜新(123000)

E-mail: kuangfing@163.com

摘要: 对受弯构件在弯矩作用平面内的弹塑性分析, 以便确定沿构件纵轴各截面弹性区的分布范围, 再通过建立平面外弯曲与扭转的平衡方程求解构件的临界弯矩。并使用 C++ 语言编制程序对计算结果进行验证。

关键词: 受弯构件, 弹塑性分析, 临界弯矩

中图分类号: TU392.1

1. 引言

对于两端简支长 l 的纯弯构件, 如图 1 (a) 所示, 在弹塑性状态发生弯扭屈曲时, 构件的临界弯矩 M_{cr} 与钢材的性能和截面中的残余应力有关。而对于不同材料构件截面, 计算截面弯矩的方法^[1]也不相同, 如冷弯薄壁型钢截面、轧制型钢或焊接组合截面或具有厚实板件的受弯构件, 三者的应力应变曲线见图 1 (b)、(c)、(d)。本文主要结合已有计算方法^[2]对双轴对称的轧制型钢或焊接组合 I 形截面纯弯构件进行分析计算, 并编制了程序进行验证。

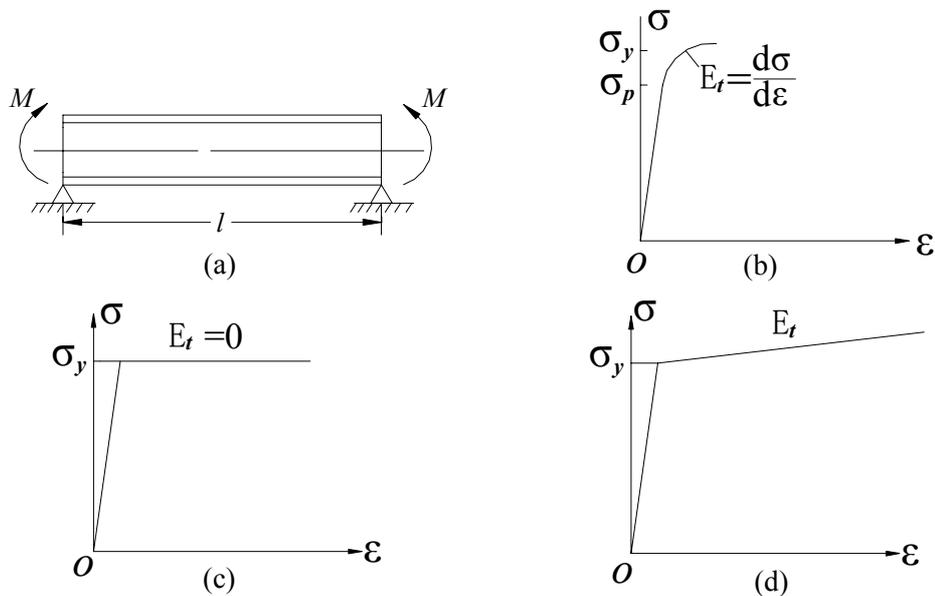


图 1 应力—应变曲线
Fig1 Stress-strain diagram

2. 计算方法与步骤

对于所选计算构件, 由于残余压应力和残余拉应力的峰值在翼缘的不同部位, 如图 2 (a) 所示, 在弯矩作用下, 如 $|\sigma_{rt}| < |\sigma_{rc}|$, 在上翼缘的外侧首先屈服, 而后在下翼缘与腹板连接处的腹板也开始屈服, 视材料为理想的弹塑性体, 应力屈服以后, $E_t=0$, 而 $G_t=G/4$, 在弹塑性状态, 截面的弹性区如图 2 (b) 所示, 将形成单轴对称截面, 弯曲轴将向下移动 y_n , 剪力则向下移动 y_0 并在弯曲轴之下。计算时将截面的翼缘和腹板划分为许多单元^[3], 计算步

骤如下:

2.1 建立截面的 M—Φ 关系

给定曲率 Φ, Φ 以使弯曲轴以上产生压应变的为正值, 假定弯曲轴的坐标为 y_n , 截面任一点的应变 ε_i 和应力 σ_i 之间的关系为

$$\varepsilon_i = \Phi(y_i - y_n) + \varepsilon_{ri} \quad (1)$$

$$\text{当 } -\varepsilon_y \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_y \text{ 时, } E_i = E \quad \sigma_i = \varepsilon_i E_i \quad (2a)$$

$$\text{当 } \varepsilon_i > \varepsilon_y \text{ 时, } E_i = 0 \quad \sigma_i = \sigma_y \quad G_i = G/4 \quad (2b)$$

$$\text{当 } \varepsilon_i < -\varepsilon_y \text{ 时, } E_i = 0 \quad \sigma_i = -\sigma_y \quad G_i = G/4 \quad (2c)$$

由 $\sum \sigma_i A_i = 0$ 这一条件确定弯曲轴的位置, 如与假定的 y_n 相差较大, 需调整 y_n , 直至符合要求, 即可得到 $M = \sum \sigma_i (y_i - y_n) A_i$ 再给定另一个曲率 Φ, 又可以得到与其对应的 M, 从而可建立起 M—Φ 关系, 如图 2 (c) 所示。这样给定 M 后, 就可知 Φ。由式 (1)、(2) 即可区分截面中的弹性区和屈服区。

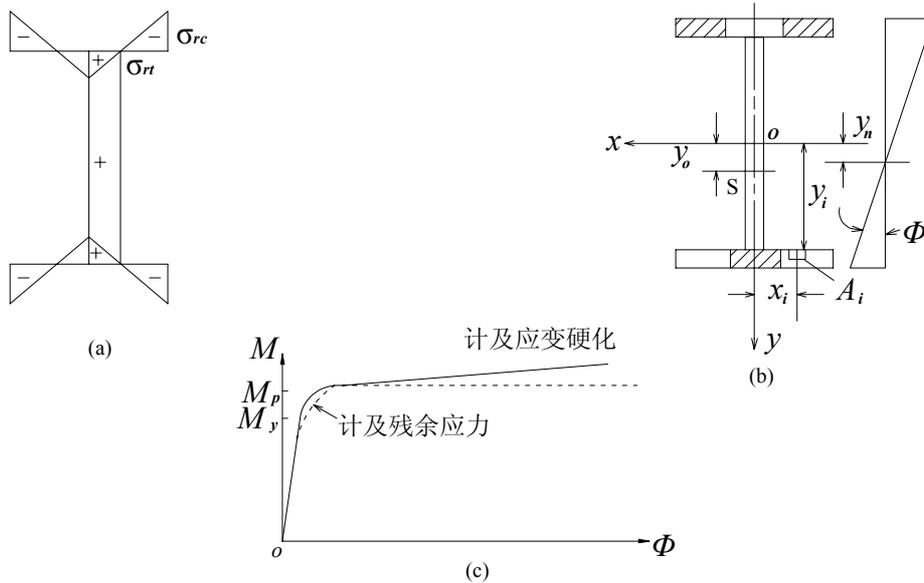


图 2 弹性状态的纯弯构件

Fig2 Pure bending member in elastic-plastic behavior

2.2 作弯矩作用平面内的弹塑性分析

对于非均匀受弯构件, 需沿纵轴将构件划分为每段长度为 a 的许多单元, 取各分段中点截面的弯矩和曲率作为此单元弯矩和曲率的平均值, 分级给定荷载或弯矩, 作构件平面内的弹塑性分析, 使之符合与上述分级荷载或弯矩相对应的每个单元内外力平衡和变形协调条件, 从而可确定各分段中点截面弹性区的分布范围^[1]。

2.3 计算截面的几何性质

确定与上述分级荷载或弯矩对应的每分段中点截面弹性区^[4]的 I_{ey} , I_{ew} , I_{et} , I_{pt} 和剪心距 y_0 及 Wagner 效应系数 \bar{K} 。

2.4 建立分段的平衡方程，形成诸分段的线性代数方程

用有限差分法或有限积分法求解非均匀受弯构件弹塑性弯扭屈曲临界弯矩时，需建立各分段含有弯矩和变形或其高阶导数的平衡方程。

绕 η 轴：

$$EI_{ey}u'' + M_x\varphi = 0 \quad (3)$$

再微分两次可得

$$[EI_{ey}u'']' + [M_x\varphi]' = 0 \quad (4)$$

Wagner 效应系数

$$\bar{K} = \sum \sigma_i \rho_i^2 A_i = \sum \sigma_i (x_i^2 + y_i^2 - 2y_0 y_i + y_0^2) A_i \quad (5)$$

绕 ζ 轴：

$$EI_{ew}\varphi''' + (\bar{K} - GI_{et} - G_t I_{pt})\varphi' + M_x u' = 0 \quad (6)$$

再微分一次可得

$$[EI_{ew}\varphi''']' + [(\bar{K} - GI_{et} - G_t I_{pt})\varphi']' + (M_x u')' = 0 \quad (7)$$

2.5 求解临界弯矩

对于非均匀受弯构件，可分级给定符合外力平衡条件的 M ，用数值法求解，形成力与变形或其导数的矩阵形式 $[K]$ ，屈曲条件是与矩阵 $[K]$ 中对应的系数行列式 $|K|=0$ 。实际的判别准则可用与前后两轮给定 M 相对应的行列式的乘积，使其满足 $|K_i| \times |K_{i+1}| \leq 0$ 即可，因为如满足此条件，则临界弯矩 M 必在 M_i 和 M_{i+1} 之间，但求解得到的 M_{cr} 与给定的 M 之间的差值应满足精确度 $|\Delta M/M| \leq 10^{-3}$ ，解得的弯矩即为临界弯矩。

2.6 实例及 C++ 程序验证

例：两端简支的双轴对称 I 形截面受弯构件，长度为 5.5m，截面尺寸 $b=150\text{mm}$ ， $h=270\text{mm}$ ，其中翼缘厚 10mm，腹板厚 6mm，残余应力的分布如图 2 (a) 所示，其中残余压应力为正值，为 $0.4\sigma_y$ ，当 $0 \leq x \leq 7.5\text{cm}$ 时，翼缘的残余应力 $\sigma_{rt} = (0.08x - 0.2)\sigma_y$ ，钢材的 $E_t = 0.03E$ ，屈服强度 $\sigma_y = 23.5\text{kN/cm}^2$ ，弹性模量 $E = 20600\text{kN/cm}^2$ ，剪变模量 $G = 7900\text{kN/cm}^2$ ， $G_t = G/4$ 。用数值法求解此构件的弹塑性临界弯矩，并用 C++ 程序验证结果。

解：截面的几何性质为： $I_x = 5851.3\text{cm}^4$ ， $W_x = 433.43\text{cm}^3$ ， $I_y = 562.5\text{cm}^4$ ， $I_t = 11.8\text{cm}^4$ ， $I_w = 95062.5\text{cm}^6$ 。计算得残余应力的 Wagner 效应系数为 $11547.3\text{kN}\cdot\text{cm}^2$ 。利用本文所述计算方法进行计算，如将翼缘截面划分为 4 层，算得 $M_{cr} = 6682.1\text{kN}\cdot\text{cm}$ ， $|\Delta M/M_{cr}| = 0.00006 \leq 10^{-3}$ ，符合精确度要求，但当翼缘截面沿厚度只划分为两层时，计算所得 $M_{cr} = 6912.2\text{kN}\cdot\text{cm}$ ， $|\Delta M/M_{cr}| = 0.035 > 10^{-3}$ ，不符合精确度要求。由此可见，在划分计算单元时应尽可能多，但也不能过多，那样将加大计算量，所以应以满足精确度要求为前提。C++ 程序计算框图如图 3 所示，计算结果为 $M_{cr} = 6681.6\text{kN}\cdot\text{cm}$ ， $|\Delta M/M_{cr}| = 0.00002 \leq 10^{-3}$ ，可见，数值法计算所得的结果是精确解。

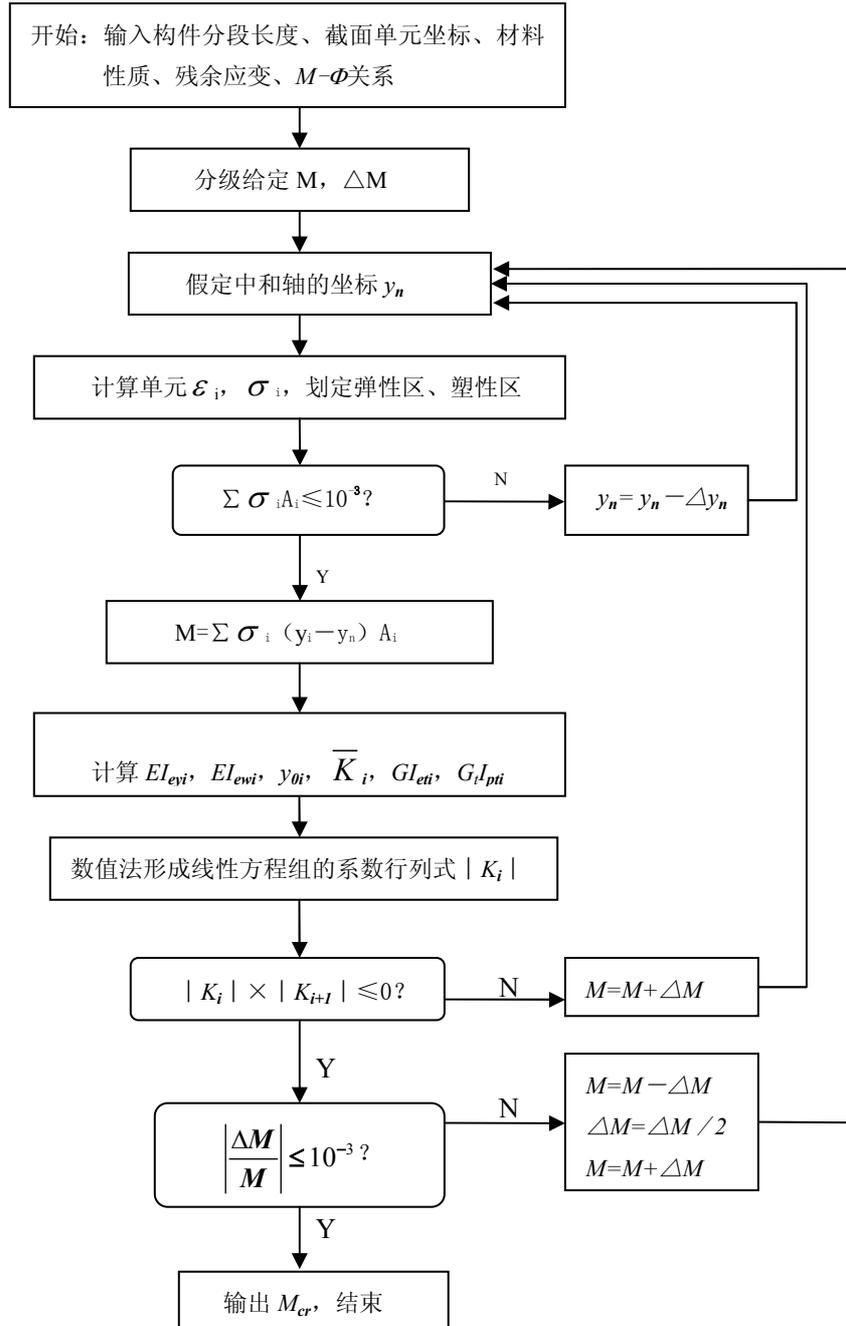


图3 临界弯矩电算框图

Fig3 Zooming schematic diagram of critical flexural torque

参考文献

[1]陈骥.钢结构稳定理论与设计.北京.科学出版社.2001.2
 [2]王新堂.钢结构设计.上海.同济大学出版社.2005.9
 [3]沈祖炎.钢结构基本原理.上海.中国建筑工业出版社.2000.8
 [4]陈绍番.钢结构设计原理(第三版).北京.科学出版社.2005.1

Numerical Method of Calculating Critical Flexural Torque of Section Member in Elastoplastic Bend and Torsion

Lin Long¹, Wang Zinan²

1. LiaoNing Technical University, Civil Engineering Institute, FuXin (123000)

2. LiaoNing FuXin ShiDai Architecture Designing Institute, FuXin (123000)

Abstract

Making elasto-plastic analysis in the acting plane for the member in bending, to define the distribution of the sectional elastic regions along the vertical axis of the member, then creating balanced equation of the bend and torsion out of the plane to work out the critical flexural torque of the construction member. And verifications of the result are carried out using C++ program.

Keywords: member in bending, elasto-plastic analysis, critical flexural torque

作者简介:

林珑, 男, 1984年生, 硕士研究生, 主要研究方向是混凝土结构和钢结构;

王子楠, 女, 1979年生, 工程师, 主要从事结构设计工作。