

声格固体模型插值算法 的稳定性研究

刘劲松 许 云 乌达巴拉

(中国地质大学,北京 100083)

摘 要 本文利用一维自动机模型研究了声格固体模型插值算法中粒子速度取不同值时对结果的精度及稳定性的影响。结果表明,只有当被插值点位于各插值节点的中心位置附近时,所得结果才具有较高的精度和稳定性。因此当插值节点数 $n = 4$ 时,对于某些速度值,插值得到的结果是不稳定的。本文同时讨论了针对这种情况的几种解决方案。

关键词 细胞自动机,声格固体模型,地震波场模拟,插值。

1 前言

声格固体模型是 Mora (1992) 为模拟复杂介质中的纵波,在格子 Boltzman 模型基础上引入变速粒子而建立的细胞自动机模型。Mora 在这一模型中借用了物理学中声子的概念,声子即固体晶格振动的能量量子。声子之间相互作用时表现为粒子的性质,发生碰撞;声子与界面相互作用时表现为波动性质,产生反射和透射。声子的速度随空间变化,可表示为

$$s_a(x) = c_a(x) \frac{-t}{x} \quad (1)$$

式中 s_a 为以每单位时间单位网格边长表示的无量纲速度,其取值范围为 $0 < s_a < 1$; c_a 为粒子速度,下标 a 表示方向数。声波速度与 s 和 c 的关系是

$$V(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{D}} = \frac{s(x)}{\sqrt{D}} \cdot \frac{-x}{t} \quad (2)$$

式中 D 为空间的维数。声格固体模型在描述粒子运动及相互作用的 Boltzman 方程中引入了散射项,利用碰撞不变因子以及在边界上压力连续与粒子数守恒的条件,在宏观极限下导出了质点位移速度所满足的方程。该方程与声波方程具有相同的形式,表明宏观波场是微观粒子运动及相互作用过程的统计平均表现,声格固体模型实质上揭示了粒子运动与波动之间的内在联系。

Mora 提出的差分算法只有在波长较大,介质速度反差较小时,计算得到的结果才具有较高的精度。因此,黄联捷(1993)提出了插值算法。为比较差分法与插值法的精度,黄利用一维

1996 年 8 月 23 日收稿。

自动机模型分析了不同波长情况下传输过程产生的弹性波能量畸变。

插值法的精度除了与波长有关外,还与粒子速度(即 s 值)有关。粒子速度对计算精度的影响表现为,当粒子速度取不同值时,被插值点在插值节点中所处的位置是不同的,只有当被插值点位于各插值节点的中心位置附近时,插值结果才具有较高的精度,为使被插值点位于各插值节点的中心位置附近,应当选取第一个插值节点的位置,但对于某些速度值无法做到这一点,由于误差随时间不断积累,将使计算结果不稳定。本文的结果还显示在 s 值取一些特殊的值时,计算结果是无条件稳定的,这一点可加以利用以简化计算,即以特殊的 s 值逼近实际的 s 值,这时可得到精确的结果,计算速度也大为提高。

2 声格固体模型的差分算法和插值算法简介

对于非均匀介质,声格固体模型的 Boltzman 方程的二阶差分方程为

$$\begin{aligned}
 N_a(x, t + \Delta t) = & N_a(x, t) - s(x) \cdot [N_a(x, t) - N_a(x - x_a, t)]/2 \\
 & + \frac{s^2(x)}{2} [N_a(x + x_a, t) - 2N_a(x, t) + N_a(x - x_a, t)] \quad (3) \\
 & + N_a^I(x, t) + N_a^S(x, t)
 \end{aligned}$$

上式中 N 表示粒子数密度,其下标代表方向数,右端的后两项分别为碰撞项和散射项。

上式即为进行差分计算的公式。计算的次序是,首先由右端前三项求得由传输过程引起的粒子数变化,在此基础上计算由散射项引起的粒子数密度变化,最后计算由碰撞项引起的粒子数密度变化,这时参与碰撞的粒子处于经过传输和散射的状态。这三步在同一时刻内完成。

黄联捷(1993)利用一维自动机模型对差分算法传输过程和散射过程的误差进行了研究。他的研究表明,只有当波长较大,介质速度反差较小时,由差分法得到的结果才具有较高的精度。为提高计算精度,黄提出了插值算法,该方法不存在散射过程的误差,利用波场在空间分布上的连续性求格点上的粒子数密度值。下面以传输过程为例,说明插值算法的基本思想。

考虑位于 x 处的准粒子,当 $s = 1$ 时,沿 a 方向在 $t + \Delta t$ 时刻运动到该处的准粒子在 t 时刻正好位于 $x - x_a$ 处,用方程表示即为

$$N_a^T(x, t + \Delta t) = N_a(x - x_a, t) \quad (4)$$

当 $s < 1$ 时,沿 a 方向在 $t + \Delta t$ 时刻运动到 x 处的准粒子在 t 时刻并不正好在网格点上,而是位于 $x - s \cdot x_a$ 处,即

$$N_a^T(x, t + \Delta t) = N_a(x - s \cdot x_a, t) \quad (5)$$

黄的插值法即是以经过 $x - x_a$ 处的准粒子序列

$$\{N_a(x - x_a, t - i \cdot \Delta t) \quad i = 1, 2, \dots, n - 1\} \quad (6)$$

用 Lagrange 插值法求出 $N_a(x - s \cdot x_a, t)$ 。

在 t 时刻,该准粒子序列所处的位置分别是

$$\begin{aligned} x_i &= x - x_a + i \cdot s \cdot x_a \\ &= x + (i \cdot s - 1) \cdot x_a \end{aligned} \quad (7)$$

为使被插值点落在插值区间内,应使 $x_n > x - s \cdot x_a$ 即

$$n > (1 - s)/s \quad (8)$$

对于散射过程的处理方法与此类似,这时应考虑散射界面所处的位置,以及由于界面的存在而产生的粒子数密度值的突变,详见文献[3]。

3 插值算法的稳定性

下面先介绍文献[8]利用一维自动机模型分析传输过程产生的能量畸变的方法,然后介绍我们应用该方法所得到的一些结果。

在传输过程产生的能量畸变是随时间积累的,文献[8]假定这种积累按指数规律变化,因此弹性波能量随时间的变化可表示为

$$E_i = E_0 e^{-a \cdot i \cdot t} \quad (9)$$

式中 E_i 为第 i 个时间步长时的能量; a 为能量畸变系数, a 绝对值的大小反映计算结果误差的大小

$$a = - \frac{1}{i \cdot t} \ln \frac{E_i}{E_0} \quad (10)$$

为求得 a ,在一个一维自动机模型中激发驻波,并计算每一时刻的弹性波总能量 E_i ,用最小二乘法拟合畸变系数 a ,即求使下式取最小值时的 a 值

$$= \sum_{i=1}^n (E_i - E_0 e^{-a \cdot i \cdot t})^2 \quad (11)$$

本文采用黄金分割法求(11)式的极值,一维自动机的格点数取为256,采用循环边界条件,计算16384个时步的弹性波能量 E_i ,用这些能量值求畸变系数 a 。图1为驻波波长取为64,采用5点插值法,并按(5)式选取插值节点得到的 $s - \log(|a|)$ 曲线图,图中的横坐标表示 s 值,纵坐标表示 a 绝对值的对数值,即 $\log(|a|)$, s 值的变化步长为0.01。在该图的下部画出了不同 s 值所对应的、被插值点在5个插值节点中的位置。图1的结果表明,在插值点数为5的情况下,当 $s > 0.5$ 及 $s < 0.25$ 时,对应的能量畸变系数 a 在 10^{-1} 数量级,这时的计算结果是发散的;相应地在插值区间上,被插值点位于第1、2节点之间和第4、5节点之间。

对于 $s < 0.25$ 的情况,可通过修改(5)式中的起始点使被插值点位于第2、4节点之间,即采用以下准粒子序列进行插值运算

$$\{ N_a(x - x_a, t - i \cdot t), \quad i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + n - 1, \}$$

$$i_0 = \text{int} [(1 - s)/s] - \text{int} [(n - 1)/2] \quad (12)$$

式中 n 为插值节点数,但对于 $s > 0.5$ 的情况,无论怎样做也无法使被插值点位于第 2、4 节点之间。因此,对于 5 点插值法来说,使计算结果稳定的 s 取值范围是 $[0, 0.5]$ 。进一步的研究表明,对于插值节点数 $n = 4$, s 值的稳定区间是 $[0, s_n]$, 其中

$$s_n = 1/\text{int}(\frac{n}{2})$$

图 2 为按 (12) 式选取插值节点得到的 5 点、3 点插值法的 $s - \log(|a|)$ 曲线图,为进行比较,图中给出了差分法的 $s - \log(|a|)$ 曲线。

从以上的结果可看出,对于声格固体模型的插值算法,计算结果的精度除了与波长有关外,还与 s 值有关。当插值节点数 $n = 4$ 时,对于区间 $[0, s_n]$ 外的 s 值,插值结果是不稳定的,插值节点数越多,精度越高,但 s 值的稳定区间也越小。在实际计算中为了解决不稳定的问题,可对所有速度值乘以一个比例因子,以使其落在稳定区间内。文献 [8] 即采用了这一方法。这样做的代价是使内存占用量和计算量都增加了近一倍。另一可选方案是采用 3 点插值法,从图 2 可看出,3 点插值法的精度高于差分法低于 5 点插值法,在 $[0, 1]$ 区间上都是稳定的,可以不增加计算量而又能达到一定的精度。

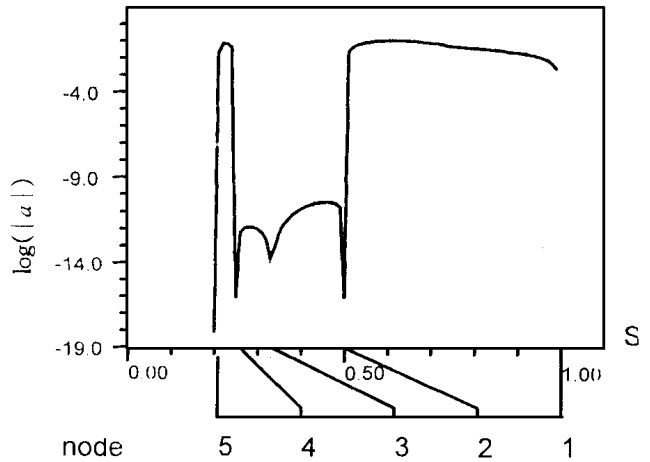


图 1 5 点插值法得到的 $s - \log(|a|)$ 曲线
下部为 s 值所对应的、被插值点在 5 个插值节点中的位置

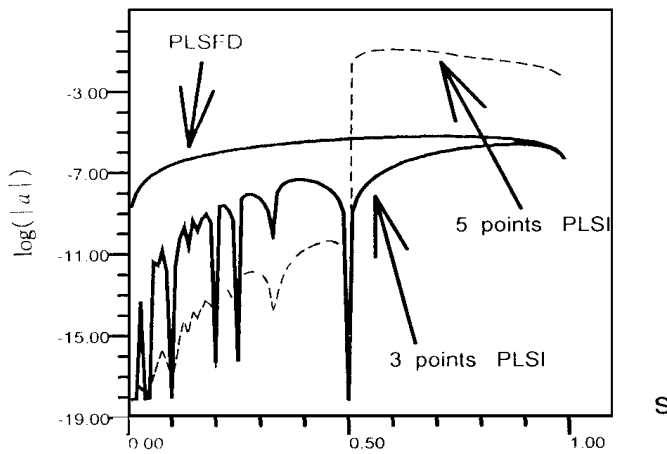


图 2 差分法、5 点、3 点插值法得到的 $s - \log(|a|)$ 曲线

从图 2 还可以看到,当 s 取一些特殊值时,畸变系数很小,这时插值的精度是很高的。其原因是被插值点与插值节点之一重合,插值结果只与该节点有关(即等于该节点上的值),这样的 s 值满足下式

$$s = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{13}$$

即粒子经过整数个时间步长到达相邻点,在这种情况下传输过程是精确的,并且不需要进行插值运算,只须将各格点上的粒子数密度存放若干步,然后直接赋值即可,在实际运算中完全可以满足(13)式的 s 值去逼近实际的 s 值,而且从理论上说,这种逼近可达到任意的精度。

参 考 文 献

- [1] 李幼铭、胡健行,细胞自动机在地震波传播中的应用.地球物理学报,Vol. 38, No. 5(651 - 661),1995年。
- [2] 姚姚,细胞自动机方法地震正演模拟,石油地球物理勘探,Vol. 30, No. 2(216 - 222),1995年。
- [3] Guy R. Mcnamara and Gianluigi Zanetti, Use of the Boltzman equation to simulate Lattice - Gas Automata. Phys. Rev. Lett. Vol. 61,1988.
- [4] Peter Mora, The Lattice Boltzman Phononic Lattice Solid J. stat. Phys. Vol. 68,1992
- [5] Lian - jie Huang and Peter Mora, The Phononic Lattice Solid by interpolation for moderling P - waves in heterogeneous media, submitted to J. stat. Phys. 1993.
- [6] Norman Matgulus, Tommaso Toffoli, Gerard Vichiac. Cellular Automata Supercomputers for Fluid - Dynamic Modeling. Physical Review Letters. Vol. 56, (1694 - 1696),1986.
- [7] D. H. Rothman, Modeling Seismic P - waves with Cellular Automata. Geophysical Review Letters. Vol. 14(17 - 20), 1987.
- [8] Jau - Inn Huang, Yu - Hua Chu, Chuan - sheng Yin, Lattice - Gas Automata for Modeling Acoustic Wave Propagation in Inhomogenous Media, Geophysical Research Lettqers. Vol. 15(1239 - 1241),1988.

A STUDY OF THE STABILITY OF PHONONIC LATTICES SOLID INTERPOLATION METHOD

Liu Jingsong, Xu Yun, Uda Bala

(China University of Geosciences, Beijing 100083)

Abstract In this paper, the authors have dealt with the stability of the PLSI method at various particle speeds. The results show that the method is stable only when the interpolated point is near the middle of interpolating nodes. In addition, several solutions to this condition are discussed.

Key words cellular automation, phononic lattice solid, seismic wave modeling, interpolation.

第一作者简介 刘劲松,男,1965年10月生。1988年毕业于厦门大学物理系。先后从事过地震数据处理软件开发和计算机系统管理工作,1994年考入中国地质大学(北京)应用地球物理系攻读博士学位,研究方向为地震波传播理论及信息处理。