高校应用数学学报A辑　Appl. Math. J.Chinese Univ. Ser.A
2001,16(3):371376

多目标规划在条件微分方程组中的应用

柯　君,张可村

(西安交通大学 科学计算与应用软件系,陕西西安 710049)

摘　要:从工程实际出发,借助最佳逼近论和总体极值的思想,运用常微分方程组的求解理论,最优化理论与数值方法,为在最优控制中的一类条件微分方程组的求解,开辟了一条新的求解途径,并用多个计算实例,证明了算法的有效性和可行性.

关键词:状态空间;最优控制;多目标规划;微分方程
中图分类号:O221.6,TB114.1
文献标识码:A　　文章编号:1000-4424(2001)03-0371-06

§1　引　言

控制理论与方法研究成果十分丰富,其中一些研究经过不断发展完善已成为成熟的独立学科,实现了从经典控制到现代控制的飞跃.60年代后,卡尔曼引入了状态空间的概念,为现代控制理论的形成和发展奠定了基础.经过二十余年的实践,证明状态空间分析法是一个非常有用的工具.

在大量的现代工业和空间技术中存在着多变量线性系统.而线性系统的状态空间模型归结为微分方程组.对于一般的微分方程组的初边值问题的求解方法已有很多,然而对本文中所讨论的条件微分方程组(SM问题)却没有很好的方法可以解决.目前,绝大多数从事控制理论算法研究的工作者只是在原有算法的基础上针对某一具体问题模型提出一些改进的方法,很少有人对抽象模型系统的构造提出新的算法.本文从计算数学的角度出发,提出了一类新算法.

在本文中将原条件微分方程组模型转化为一个多目标规划问题,可采用多种多目标规划的方法求解.这种方法只要在原模型中再加入一个约束条件就可以应用于求解最优控制的一般模型:

收稿日期:2000-05-27

$$\min J(u) = S(x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{s.t.}\ \dot{x}(t) = f(x,u,t), x(t_0) = x^0, \tag{1.1}$$
其它约束条件(根据不同问题的需要确定).

因而讨论这种将优化理论算法与控制理论与应用相结合的方法将有很高的理论价值和广泛的应用价值.

§2 模型的转化与优化模型形成

本文研究的问题模型为(SM):

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Hf(t),\\ &x(t_0) = x^0, \| x(t) \|_\infty \leqslant \alpha, \| u(t) \|_\infty \leqslant \beta,\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $x(t) = (x_1(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为状态函数,控制函数 $u(t) = (u_1(t),\cdots,u_m(t))^{\mathrm{T}}$,外力函数$f(t) = (f_1(t),\cdots,f_p(t))^{\mathrm{T}}$,$A_{n\times n}$,$B_{n\times m}$,$H_{n\times p}$均为给定常矩阵,$x^0$ 和 α,β 为给定的初始 n 维向量和正常数,$\| x(t) \|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sup\limits_{t\in[t_0,t_f]} |x_i(t)|$,$u(t)$的范数的定义与此相同.

2.1 状态方程基解矩阵的构造

我们可根据常微分方程理论与解法,给出状态曲线 $x(t)$的带有控制函数 $u(t)$的表达式.由常数变易法公式可得

$$x(t) = \exp[(t - t_0)A]x^0 + \exp(tA)\int_{t_0}^{t} \exp(-sA)(Bu(s) + Hf(s))\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

先给出状态方程基解矩阵 $\exp(tA)$的构造.采用直接代入的方法及 Hamilton-Cayley 定理,易得:

$$\exp(At) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)P_j, \tag{2.3}$$

其中:$P_0 = E$,$P_j = \prod\limits_{k=1}^{j}(A - \lambda_k E)$,$j = 1,2,\cdots,n-1$,$E$ 为 n 阶单位阵. $r_1(t),\cdots,r_n(t)$为下面初值问题的解:

$$\dot{r}_1 = \lambda_1 r_1, \dot{r}_j = \lambda_j r_j + r_{j-1}, r_1(0) = 1, r_j(0) = 0, j = 2,\cdots n. \tag{2.4}$$

又由于 $r_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{j} Q_{j,k}(t)e^{\lambda_k t}(j > 1)$,其中 $Q_{j,k}(t)$为关于 t 的多项式,且经计算可直接确定 $Q_{j,k}(t)$的系数(由于篇幅有限,这里略去),所以通过这种途径可以求其解析表达式.为了避免繁琐的推导,也可采用数值积分公式计算 $r_j(t)$,将$[t_0,t_f]$ n_1 等分,利用梯形公式计算可得:

$$r_1(t) = e^{\lambda_1 t}, r_j(t) = e^{\lambda_j t}\frac{t}{2n_1}[r_{j-1}(0) + e^{\lambda_j t}r_{j-1}(t) + 2\sum e^{-\lambda_j\frac{t\cdot i}{n_1}} r_{j-1}(\frac{t\cdot i}{n_1})]. \tag{2.5}$$

此外,当特征值有复数时,$r_1(t),\cdots,r_n(t)$中可能出现复数,$\exp(At)$也可能为复矩阵,但是下面的定理说明即使在特征值为复数的情况下,$\exp(At)$仍为实矩阵.

定理2.1 当问题(2.2)的状态方程中的矩阵 A 的特征值为复数时,基解矩阵 $\exp(At)$

仍为实数矩阵.

虽然理论上当特征值为复数的情况下 $\exp(At)$ 仍为实数矩阵,但在实际计算中由于误差存在,有可能使其虚部不等于 0,此时为了计算方便可令其为 0,从而去掉该项.

综上,可求出各种特征值情况下的 $r_1(t),\cdots,r_n(t)$,再利用(2.3)式即可求出基解矩阵 $\exp(At)$.

由(2.2)式可知 $x(t)$ 依赖于 $u(t)$ 的选取,因而如何求得控制函数 $u(t)$ 将是问题的关键.

2.2 控制函数 $u(t)$ 的形成(无限维问题的有限化)

问题(2.1)中控制函数 $u(t)$ 的类型是未知的,也就是说,要在无限多种函数类中寻求最优解,因而这是一个无限维问题.显然这是难于求解的.由最佳逼近原理可知任意连续函数均可采用分段低次多项式逼近.因此只要运用逼近论的理论和方法,采用分段低次多项式逼近函数 $u(t)$ 便可以将原无限维问题有限化,有助于工程上的具体实现.不失一般性,用分段二次多项式逼近 $u(t)$,下面给出控制函数类的构造过程.

将区间 $[t_0,t_f]$ 做划分 $\Delta:t_0<t_1<\cdots<t_N=t_f$,在每个小区间上用分段二次多项式 $g_j(t)$ 代替 $u(t)$ 的第 j 个分量函数($j=1,\cdots,m$),并且 $g_j(t)$ 具有一阶光滑性,满足端点条件:

$$g_j(t_0)=u_j(t_0)=u_j^0,\qquad g'_j(t_0)=u'_j(t_0)=du_j^0. \tag{2.6}$$

设在 $[t_0,t_f]$ 区间上 $g_j(t)$ 的表达式为:

$$\tilde{u}_j(t)=a_{j,i}+b_{j,i}(t-t_i)+c_{j,i}(t-t_i)^2/2,\ i=0,\cdots,N-1,\ j=1,\cdots,m, \tag{2.7}$$

加上边界条件和一阶光滑性条件,综合可得:

$$\begin{cases} a_{j,0}=u_j^0,\ a_{j,i+1}=a_{j,i}+b_{j,i}(t_{i+1}-t_i)+c_{j,i}(t_{i+1}-t_i)^2/2,\ i=0,\cdots,N-1, \\ b_{j,0}=du_j^0,\ b_{j,i+1}=b_{j,i}+c_{j,i}(t_{i+1}-t_i),\qquad j=1,\cdots,m. \end{cases} \tag{2.8}$$

由上述关系可知,当分划固定时,$g_j(t)$ 的表达式可化成只含未知参数 $c_{j,i}(j=1,\cdots,m,\ i=0,\cdots,N-1)$ 的函数 $g_j(c_{j,i},t)$,这些参数的个数是有限的,因而原无限维问题化为了有限维问题.

2.3 状态函数 $x(t)$ 的求解

在给出 $u(t)$ 的分段表达式后,经推导可给出式(2.2)的分段解析式.其中,当矩阵 A 的特征值互异时或 A 的特征多项式只有一个重根时,均可给出精确表达式.当 A 的特征多项式有任意个重根时,可按同样的推导方法求 $x(t)$ 的表达式,不过只能获得近似递推式,具体推导过程省略.

若只求 $x(t)$ 的数值解,那么在各种特征值情况下,都可以用数值积分求.

对于 $\exp(At)\int_{t_0}^{t}\exp(-sA)Hf(s)\mathrm{d}s$ 中积分的计算,一般是根据情况而定,若 $f(t)$ 函数类型简单易于积分,则我们可以给出该积分的解析表达式,若 $f(t)$ 的类型复杂不易于积分,则我们可以给出数值积分公式.这些都是易于在计算机上实现的.

设计算所得的 $x(t)$ 其虚部为 $x\mathrm{i}$,设其实部为 $x\mathrm{r}$,由定理 2.1 知,理论上 $x(t)$ 为实函数,因而只取实部,强行去掉计算误差.

2.4 优化模型的建立

综上分析,容易想到以下模型

$$\begin{aligned}&\min \max_{t\in[t_0,t_f]} |x_i(t)| \\ &\text{s.t.} \max_{t\in[t_0,t_f]} |u_j(t)| < \beta, i = 1,\cdots,n, j = 1,\cdots,m\end{aligned} \tag{2.9}$$

的解一定是满足原微分方程模型的.这是一个以 $c_{j,i}$ 为优化变量的多目标规划问题.求解方法很多.我们采用的方法是将上述模型转化为模型:

$$\begin{aligned}&\min \quad \delta \\ &\text{s.t.} \max_{t\in[t_0,t_f]} |x_l(t,c_{j,i})| < \delta, l = 1,\cdots,n \\ &\max_{t\in[t_0,t_f]} |u_j(t,c_{j,i})| < \beta, i = 0,\cdots,N-1, j = 1,\cdots,m.\end{aligned} \tag{2.10}$$

它是以 δ 和 $c_{j,i}$ 为优化变量的非线性规划问题,可以用我们熟知的许多方法进行求解.

然而,此优化模型的解并不与模型(2.1)的解完全等价.在(2.1)有解的情形下,在一固定分化下的优化模型解出的 δ 若满足 $\delta \leqslant \alpha$ 那么它所对应的解一定是(2.1)的解.反之,若不满足,可采用将逼近 $u(t)$ 的分段二次多项式在区间 $[t_0,t_f]$ 上的分段增加的方法使 δ 逐渐减小直到小于 α 为止.也可取 $u(t)$ 为其它的函数类,可采用上述类似的方法讨论.

§3　优化模型的求解

3.1　约束函数的化简

由于优化模型中的约束函数形式复杂,不易直接求值,本小节中考虑将其化简.对于第一类约束条件的左端函数 $\max_{t\in[t_0,t_f]} |u_j(t,c_{j,i})| = mu_j(c_{j,i})$ 容易得到,确定方法如下.因为 $u_j(t,c_{j,i})$ 是 $[t_0,t_f]$ 上的分段二次多项式,那么在每个分段 $[t_i,t_{i+1}]$ 上,$|u_j(t)|$ 的最大值为

$$\begin{cases}\max(|a_{j,i}|, |a_{j,i}+(t_{i+1}-t_i)b_{j,i}|), & c_{j,i}=0 \\ \max(|a_{j,i}|, |a_{j,i}+(t_{i+1}-t_i)b_{j,i}+c_{j,i}(t_{i+1}-t_i)^2/2|, |t_i - b_{j,i}/c_{j,i}|), & c_{j,i}\neq 0.\end{cases} \tag{2.11}$$

再依次比较每一段上的最大值就得到了 $mu_j(c_{j,l})$.

关于函数 $\max_{t\in[t_0,t_f]} |x_l(t,c_{j,i})| = mx_i(c_{j,i})$,由于 $x_l(t,c_{j,i})$ 的形式非常繁琐,对其求导就更加困难.所以我们采用将区间 $[t_0,t_f]$ 离散化的方法.即将整个区间分成 n_2 份,比较各个节点上的 $|x_l(t_k,c_{j,i})|$,$(k=0,\cdots,n_2)$ 取其最大值来近似 $mx_l(c_{j,i})$.

这样,优化函数和约束函数都可方便求出.模型为

$$\begin{aligned}&\min \quad \delta \\ &\text{s.t.}\begin{cases} mx_l(c_{j,i}) \leqslant \delta, l = 1,\cdots,n, \\ mu_j(c_{j,i}) \leqslant \beta, i = 0,\cdots,N-1, j = 1,\cdots,m.\end{cases}\end{aligned} \tag{2.12}$$

这是一个以 δ 和 $c_{j,i}$ 为优化变量的有 $m+n$ 个约束条件的约束优化问题.

3.2　约束优化的具体求解

要求解约束优化问题须将它转化为无约束问题.在此选用 Lagrange 乘子法.对于无约束优化问题的求解,由于被优化函数的形式复杂,最好选用不带导数的方法.在此选用坐标轮

换法.相应的一维搜索也采用不带导数的方法,如黄金分割法、逐步二次插值法、试探法等等.

§4 例题及结果分析

为了检验算法的可实现性,列举了一些不同的算例.具体的,根据方程的维数不同和矩阵 A 的特征多项式的根为实的、复的以及单根、重根等不同情况都做了测试,收到了预期的效果.下面,只给出方程维数为 3 维,A 的特征值既有实的又有复的情况.

算例:

令 $m=3$,$n=3$,$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$x^0=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$t_0=0$,$t_f=1$,$\beta=1$,将$[0,1]$分为 N 等分,$u(t)$满足零端点条件.

1)$Hf(t)=0$ 时,令 $N=5$,结果为

$$\delta = 2.593750,$$

$$\max_{t\in[0,1]}|u_1(t)| = 0.785 < \beta, \max_{t\in[0,1]}|u_2(t)| =$$
$$\max_{t\in[0,1]}|u_3(t)| = 0.820078 < \beta,$$
$$\max_{t\in[0,1]}|x_1(t)| = 2.586151 < \delta, \max_{t\in[0,1]}|x_2(t)| = 0.664909 < \delta,$$
$$\max_{t\in[0,1]}|x_3(t)| = 0.819721 < \delta.$$

令 $N=10$,结果为:

$$\delta = 2.539551, \max_{t\in[0,1]}|u_1(t)| = \max_{t\in[0,1]}|u_2(t)| = \max_{t\in[0,1]}|u_3(t)| = 0.680312 < \beta,$$
$$\max_{t\in[0,1]}|x_1(t)| = 2.539433 < \delta, \max_{t\in[0,1]}|x_2(t)| = 0.697003 < \delta, \max_{t\in[0,1]}|x_3(t)| = 0.765469 < \delta.$$

2)$H=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$f(t)=\sin t$ 时,若 $N=5$,结果为:

$$\delta = 3.223606, \max_{t\in[0,1]}|u_1(t)| = 0.608446 < \beta, \max_{t\in[0,1]}|u_2(t)| =$$
$$\max_{t\in[0,1]}|u_3(t)| = 0.779846 < \beta,$$
$$\max_{t\in[0,1]}|x_1(t)| = 3.184529 < \delta, \max_{t\in[0,1]}|x_2(t)| = 0.424841 < \delta,$$
$$\max_{t\in[0,1]}|x_3(t)| = 1.373197 < \delta.$$

若 $N=10$ 结果为:$\delta = 3.216733$,$\max_{t\in[0,1]}|u_1(t)| = \max_{t\in[0,1]}|u_2(t)| = \max_{t\in[0,1]}|u_3(t)| = 0.636001 < \beta$,

$$\max_{t\in[0,1]}|x_1(t)| = 3.198174 < \delta, \max_{t\in[0,1]}|x_2(t)| = 0.457368 < \delta, \max_{t\in[0,1]}|x_3(t)| = 1.319748 < \delta.$$

从以上算例可看出,分段二次函数在$[t_0,t_f]$上的分划越细,$u(t)$可取的函数的范围就越广,这样可以降低 δ 的最小值,直到小于给定的 α,但随着分划的加密,算法的时间会大大增加.当方程组的维数较高时,例如为 6 维,计算量很大,所以对优化变量较少的问题能在相对较短的时间内求解.

参考文献：

[1] 庞国仲.自动控制原理[M].合肥:中国科技大学出版社,1993.
[2] 毛云英.动态系统与最优控制[M].北京:高等教育出版社,1994.
[3] 王翼,王秀峰.现代控制论基础[M].北京:高等教育出版社,1995.
[4] 陈福祥,朱家万.现代控制理论[M].武汉:武汉大学出版社,1990.
[5] 黄炜,张可村.条件微分方程组的一种数值优化解法[J].运筹学杂志,1997,16(1):65.
[6] 黄炜,张可村.线性最优控制问题的数值优化解法[A].袁亚湘编,96′非线性规划国际会议论文集[C].北京,1996.
[7] 王高雄等.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,1983.
[8] 张可村.工程优化的算法与分析[M].西安:西安交通大学出版社,1988.
[9] 袁亚湘.非线性规划数值方法[M].上海:上海科学技术出版社,1993.

APPLICATION OF MULTI-OBJECTIVE PROGRAMMING IN CONDITIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

KE Jun, ZHANG Ke-cun

(*School of Scientific Computing and Applied Software, Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an* 710049, *China*)

Abstract: Standing on engineering practice, the optimization theorem and numerical method create a new way to solve a certain kind of conditional differential equations in optimal control. This method uses the idea of the best approximation theorem, the global extreme value and the solution theorem of differential equations with constant coefficients. At the end of this paper several examples are presented to show the effectiveness and feasibility of this method.

Key Words: State Space; Optimal Control; Multi-objective Programming; Differential Equations
Subject Classification: 90C29