

基于控制顶点偏移的等距曲线最优逼近*

刘利刚, 王国瑾

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027);

(浙江大学 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

E-mail: ligang_liu@hotmail.com; wgj@math.zju.edu.cn

http://www.zju.edu.cn

摘要: 利用最佳平方逼近的 Legendre 多项式来逼近基曲线的法矢曲线, 计算出各控制顶点的偏移向量, 由此产生偏移控制多边形来得到等距曲线的逼近曲线. 通过与 Tiller, Cobb, Coquillart 和 Elber 等多种基于控制顶点偏移的等距逼近法的比较, 表明此方法中曲线的离散次数和控制顶点数最少. 此方法简单、直观, 而且等距逼近曲线的表达式与原曲线具有相同形式, 因而有很好的应用前景.

关键词: 几何造型; 等距曲线; 曲线逼近; 顶点偏移; Legendre 多项式

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

曲线曲面的等距计算(offsetting)是 CAD/CAM 系统中的一个重要几何运算, 在数控加工、道路设计、汽车车身设计等工业领域中有着广泛的应用, 因而受到众多学者的重视^[1,2]. 其中等距曲线是等距问题中的基本问题, 研究文献非常丰富. 然而, 等距运算是一个非常困难的几何运算, 与基曲线曲面相比, 等距曲线曲面形式复杂, 具有非常高的代数次数, 此外还有许多实际应用问题需要解决.

对于平面正则参数曲线 $C(t)=(x(t), y(t))$, 它的有向距离为 d 的一条等距曲线可以表示为 $C_d(t)=C(t)+d \cdot N(t)$, 其中 $N(t)=(-y'(t), x'(t))/\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ 为 $C(t)$ 的单位法向量. 由于法向量的分母中出现根式, NURBS 曲线的等距曲线一般不再是 NURBS 曲线, 因而不能由常用的 CAD/CAM 系统来有效地处理. 为此, 用简单曲线去逼近等距曲线是首选的一个有效办法.

等距曲线的逼近方法主要有以下 3 种类型^[3]: (1) 偏移控制顶点的方法^[4-7]. 其基本思想是直接偏移基曲线的控制顶点, 然后用偏移得到的控制多边形构造逼近基曲线的等距曲线. (2) 插值拟合方法^[8-12]. 例如: Klass^[8]和 Hoschek^[9]利用三次 Hermite 曲线来逼近等距曲线; Pham^[10]利用等距曲线上的采样点插值, 反求三次 B 样条逼近曲线的控制顶点; Elber 和 Cohen^[11]利用 NURBS 曲线的和与积来表示误差函数, 在最大误差值处离散曲线; Peigl 和 Tiller^[12]首先判断基曲线上的直线段或圆弧段部分, 然后根据曲率大小对其他曲线段部分的等距曲线采样, 再利用 NURBS 曲线插值. (3) 包络方法. Lee 等人^[13]用二次 Bézier 曲线逼近圆周, 然后将此逼近曲线沿基曲线扫掠所得的包络线作为等距逼近曲线.

为保持造型系统的数据结构和几何算法的统一性, 等距逼近曲线常用与基曲线同类型的曲线来逼近. 在以上 3 类逼近方法中, 基于控制顶点偏移的方法简单、直观, 几何意义明显, 逼近曲线的表达式与原曲线形式相同. 但迄今为止, 国际上此类方法都不具备有效的手段来控制误差. 本文从分析此类方法的误差出发, 建立了基曲线法矢曲线的最佳平方逼近, 进而偏移基曲线的控制多边形使逼近误差达到最小. 通过与各种方法^[4-7]的反复试

* 收稿日期: 2000-06-19; 修改日期: 2000-08-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60173034); 国家重点基础研究发展规划 973 资助项目(G1998030600); 浙江省自然科学基金资助项目(698025)

作者简介: 刘利刚(1975 -), 男, 江西吉安人, 博士, 主要研究领域为曲线曲面逼近, 计算机图形学; 王国瑾(1944 -), 男, 浙江绍兴人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 几何造型, 应用逼近论.

算比较可知,本文的方法在曲线的控制顶点个数和误差收敛速度上大大优于 Tiller,Cobb,Coquillart,Elber 等人的方法,并且计算稳定可靠,精度可任意控制,可满足实际造型系统的需要.

1 基于控制顶点偏移的等距曲线逼近方法的分析

在 CAD/CAM 中,一般用 NURBS 形式 $C(t) = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,n}(t), t \in [0,1]$ 来表示曲线,式中控制顶点 $P_i (i=0,1,\dots,n)$ 构成控制多边形, $R_{i,n}(t)$ 为调配(blending)基函数.如果我们把 P_i 偏移一定距离得到新顶点 P_i^a ,则 NURBS 曲线 $C_d^a(t) = \sum_{i=0}^n P_i^a R_{i,n}(t)$ 可作为等距曲线 $C_d(t)$ 的逼近曲线(如图 1 所示).

偏移控制顶点的逼近方法几何直观性强,10 多年来有许多国际著名学者都在使用这种方法进行研究工作.Tiller 和 Hanson^[4]将控制多边形的各边朝其垂直方向平移距离 d ,再把相邻平移边的交点作为新顶点构成控制多边形以生成等距逼近曲线.Cobb^[5]将控制顶点 P_i 偏移 $d \cdot N(\xi_i)$,其中 ξ_i 为曲线上与点 P_i 距离最近的那一点的参数, $N(\xi_i)$ 为此点的单位法向.Coquillart^[6]改进了 Cobb 的方法,考虑了点 P_i 与控制节点 $C(\xi_i)$ 间的距离 D_i 和曲线在点 $C(\xi_i)$ 处的曲率 κ_i ,将点 P_i 沿方向 $N(\xi_i)$ 偏移距离 $d(1 + \kappa_i \cdot D_i)$.Elber 和 Cohen^[7]以 Cobb 方法得到的控制多边形为初值,利用点 $C(\xi_i)$ 的误差值调整 P_i 处的偏移量.如此迭代进行,使逼近曲线收敛到真正的等距曲线.上述 4 种方法操作简单,但都只是利用采样点的误差值来估计误差,通过进一步离散曲线以减少误差,因而不易控制误差.为此,我们将精确分析这一误差,引出对等距曲线作最优逼近的一个算法设计.

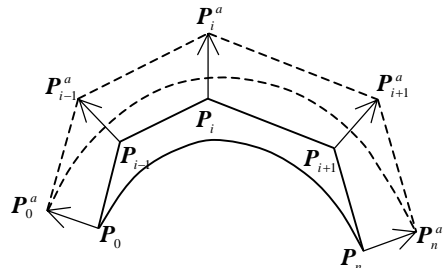


Fig. 1 The control polygon by shifting the control points of the base curve
图 1 偏移控制顶点得到控制多边形

2 等距曲线控制顶点偏移的最优逼近方法

2.1 基于控制顶点偏移的等距曲线逼近的误差分析

为使讨论简单,不妨设曲线 $C(t)$ 以 Bernstein 基 $B_i^n(t)$ 作为调配基函数 $R_{i,n}(t)$,且设控制顶点 P_i 偏移向量 D_i 得到点向量 $P_i^a = P_i + D_i, i = 0,1,\dots,n$,则等距曲线逼近的误差为

$$e(t) = C_d^a(t) - C_d(t) = \sum_{i=0}^n D_i B_i^n(t) - d \cdot N(t) = D(t) - N_d(t), \tag{1}$$

其中 $D(t) = \sum_{i=0}^n D_i B_i^n(t)$ 不妨称为偏移曲线,而 $N_d(t) = d \cdot N(t)$ 称为法矢曲线.

2.2 法矢曲线的最佳多项式逼近的导出

由式(1)可知,若 $D(t)$ 能很好地逼近 $N_d(t)$,则 $C_d^a(t)$ 的误差曲线 $e(t)$ 将很小.因此,问题转化为如何寻求一条次数不高于 n 的多项式曲线 $D(t)$ 逼近法矢曲线 $N_d(t)$.在逼近论中,利用多项式逼近解析函数有许多方法.经试验比较,我们发现 Legendre 最佳平方逼近多项式 $\{L_i(t), i = 1,2,\dots\}$ 效果最为理想.它是由幂基函数以权函数 $\rho(t) = 1$ 正交化产生出来的,可以由以下递推式得到^[14]:

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = t, \quad (i+1)L_{i+1}(t) = (2i+1)tL_i(t) - iL_{i-1}(t), \quad i = 1,2,\dots \tag{2}$$

函数 $f(t) \in C[-1,1]$ 按 Legendre 多项式 $\{L_0(t), L_1(t), L_2(t), \dots\}$ 展开的 n 次多项式为

$$S_n(t) = a_0 L_0(t) + a_1 L_1(t) + \dots + a_n L_n(t), \tag{3}$$

其中

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t)L_k(t)dt, \quad k=0,1,\dots,n.$$

其平方误差为

$$\|\delta\|_2 = \|f - S_n\|_2 = \left[\int_{-1}^1 [f(t) - S_n(t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^1 f^2(t)dt - \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

由逼近论可知, $S_n(t)$ 就是 $f(t)$ 在 $[-1,1]$ 上的 n 次最佳平方逼近多项式.

据此,我们首先构作法矢曲线 $N_d(t)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式曲线

$$D(t) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(2t-1), \quad a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 N_d\left(\frac{t+1}{2}\right) L_k(t)dt, \quad t \in [0,1], \quad (5)$$

再由^[14] $L_k(t) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \binom{k}{i} B_i^k\left(\frac{t+1}{2}\right)$, $t \in [-1,1]$, 把偏移曲线化为 Bézier 形式 $D(t) = \sum_{i=0}^n D_i B_i^n(t)$, 就可以得到基曲线 $C(t)$ 的控制顶点 P_i 的偏移向量 D_i , $i=0,1,\dots,n$.

2.3 追加端点约束的多项式逼近

上述得到的偏移曲线 $D(t)$ 并不能插值 $N_d(t)$ 的首、末端点,这在曲线离散时是不实用的.下面我们给出一种产生保端点插值的 n 次近似最佳平方逼近多项式的方法.

我们的目标是寻求一个 $n(n > 3)$ 次多项式 $S_n(t) = \sum_{i=0}^n s_i B_i^n(t)$ 逼近函数 $f(t) \in C[0,1]$, 并且满足端点插值条件

$S_n(0) = f(0) = f_0, S_n(1) = f(1) = f_1$, 即 $s_0 = f_0, s_n = f_1$. 于是

$$S_n(t) = f_0 B_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} s_i B_i^n(t) + f_1 B_n^n(t), \quad t \in [0,1]. \quad (6)$$

若 $\hat{S}_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i B_i^n(t)$ 是 $\hat{f}(t) = f(t) - f_0 B_0^n(t) - f_1 B_n^n(t)$ 的最佳逼近, 则 $S_n(t)$ 成为 $f(t)$ 的最佳逼近. 因为 $\hat{f}(0) = \hat{f}(1) = 0$, $\hat{f}(t)$ 必含有因子 $(1-t)t$. 令 $\tilde{f}(t) = \hat{f}(t)/[(1-t)t]$, 它在端点的值定义为 $\tilde{f}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \hat{f}(t)/[(1-t)t]$ 和 $\tilde{f}(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \hat{f}(t)/[(1-t)t]$. 若 $\tilde{f}(t)$ 的 $n-2$ 次最佳多项式逼近为 $\tilde{S}_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} \tilde{s}_i B_i^{n-2}(t)$, 则

$$\begin{aligned} S_n(t) &= f_0 B_0^n(t) + (1-t)t \tilde{S}_{n-2}(t) + f_1 B_n^n(t) \\ &= f_0 B_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-2}{i-1} / \binom{n}{i} \tilde{s}_{i-1} B_i^n(t) \right] + f_1 B_n^n(t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $t \in [0,1]$ 为 $f(t)$ 的 n 次近似最佳逼近多项式, 并且满足端点插值条件. 类似地, 我们还可得到保高阶端点插值的函数 $f(t)$ 的近似最佳多项式逼近. 另外, 也可将 Jacobi 多项式^[15]用于带端点约束的多项式逼近中.

2.4 一般NURBS曲线的等距曲线逼近

若曲线 $C(t)$ 及其等距曲线 $C_d(t)$ 的逼近曲线 $C_d^a(t)$ 都以函数 $\omega_i / \sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)$ 作为调配基函数 $R_{i,n}(t)$, 则偏

移曲线为 $D(t) = \sum_{i=0}^n w_i D_i B_i^n(t) / \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)$. 这时, 我们可应用类似于第 2.3 节中的方法先求 $\left(\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \right) N_d(t)$ 的 n 次最佳多项式逼近曲线, 然后求得 $D_i (i=0,1,\dots,n)$.

对于一般的 NURBS 曲线, 通过插入节点把它变成分段有理 Bézier 曲线, 用第 2.3 节的方法对各段作等距逼近, 就可得到用 NURBS 表示的 G^0 阶连续的等距逼近曲线, 对方法适当作修改也可以保证更高阶的连续性.

必须指出, 对具有拐点的基曲线, 应首先在拐点处将曲线离散, 再对各段分别作等距逼近曲线.

在本文中, 我们利用 Gauss-Legendre 数值积分公式^[16]来计算相关的积分. 这一公式数值稳定而且精度很高, 应用也十分方便, 只需对积分函数离散采样就可以进行高精度的积分计算.

虽然 Legendre 多项式逼近有显式的平方误差计算公式(4), 但在与其他方法比较时, 我们通常取曲线段上的

若干个测量点进行误差计算.当误差不满足精度时,需要在误差最大点处对此曲线段进行离散.

现把基于控制顶点偏移的等距曲线最佳逼近算法总结描述如下:

输入: NURBS 曲线 $C(t)$ ($t \in [0,1]$), 等距距离 d , 精度 ε .

- Step 1. 将 NURBS 曲线 $C(t)$ 通过插入节点分解成有理 Bézier 段;
 - Step 2. 对每一曲线段, 计算其法矢曲线 $N_d(t)$, 并把参数区间变换至 $[-1,1]$;
 - Step 3. 求法矢曲线 $N_d(t)$ 的 n 次多项式逼近曲线, 并由此得到偏移曲线 $D(t)$;
 - Step 4. 若所有曲线段都满足精度要求, 则转 Step 6;
 - Step 5. 将不满足精度的曲线段在最大误差点处离散, 转 Step 2;
 - Step 6. 将参数区间变回 $[0,1]$, 得到各段曲线的控制顶点的偏移向量;
 - Step 7. 由得到的偏移向量计算控制顶点并构造等距逼近曲线, 除去多余的节点.
- 输出: 满足精度 ε 要求的等距逼近 NURBS 曲线 $C_d^\varepsilon(t)$.

3 实例比较

我们将各种基于控制顶点偏移的等距曲线逼近法进行试算比较, 各表格中 Til, Cob, Coq, Elb 所对应的列分别为文献[4~7]中的方法, Liu 所对应的列为本文保端点约束逼近法. 另外, 我们也把本文提出的方法中应用 Chebyshev 多项式逼近法向和采样最小二乘逼近法向的结果作比较, 所对应的列分别为 Che, Lst.

以下各例中实线为基曲线, 虚线为等距逼近曲线. 例 1 和例 2 中的数据取自文献[13]. 文献[13]中有关于 Til, Cob, Elb 等方法的比较结果的表格, 我们将自己的结果加入到这些表格中以进行比较. 例 3 中的基曲线及所有方法的比较结果均由我们得出. 试验用机为 SGI OCTANE 工作站.

例 1: 基曲线为 3 次 Bézier 曲线, 其控制顶点为 $(-0.785938, 0.891849), (-0.993306, -0.59695), (0.3, -2.5), (0.9, -0.2)$. 曲线等距距离为 $d = 1.0$, 如图 2(a) 所示. 表 1 为在不同误差要求 ε 下, 用各种方法得到的等距逼近曲线的控制顶点数的比较结果.

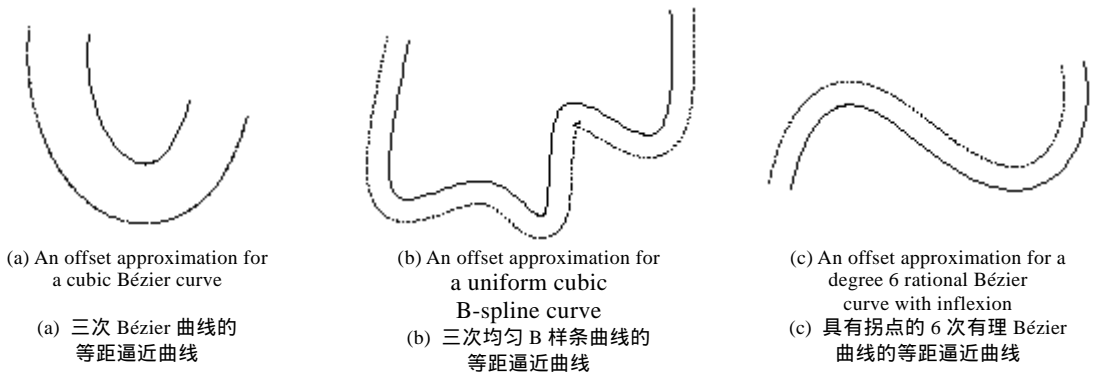


Fig.2
图 2

Table 1 Comparison of the number of the control points for Example 1
表 1 例 1 的控制顶点数比较

ε	Til	Cob	Coq	Elb	Che	Lst	Liu
10^{-1}	10	10	10	10	7	7	7
10^{-2}	31	31	28	25	22	13	10
10^{-3}	97	94	88	73	67	19	13
10^{-4}	322	316	295	205	184	31	19
10^{-5}	886	865	817	724	544	50	31

例 2: 基曲线为 3 次均匀 B 样条曲线, 它有 7 个控制顶点 $(-3.01619, 2.34143), (-3.97193, -2.20842), (-1.07045, 0.0722807), (0.319568, -2.77522), (-0.152767, 2.299), (2.92416, -0.939865)$ 和 $(2.8027, 3.02775)$. 等距曲线

距离为 $d = 0.5$, 如图 2(b)所示. 控制顶点数目的比较结果见表 2.

Table 2 Comparison of the number of the control points for Example 2
表 2 例 2 的控制顶点数比较

ε	Til	Cob	Coq	Elb	Che	Lst	Liu
10^{-1}	25	28	22	19	25	19	19
10^{-2}	67	73	58	58	55	49	31
10^{-3}	202	208	193	174	178	85	52
10^{-4}	640	637	607	417	388	139	94
10^{-5}	1 918	1 846	1 756	1 357	1 012	241	133

例 3: 基曲线为 6 次有理 Bézier 曲线, 由于它具有拐点, 我们首先在曲线的拐点处将曲线离散为两段, 然后再进行等距曲线的逼近, 如图 2(c)所示. 控制顶点数目的比较结果见表 3.

Table 3 Comparison of the number of the control points for Example 3
表 3 例 3 的控制顶点数比较

ε	Til	Cob	Coq	Elb	Che	Lst	Liu
10^{-1}	85	187	31	31	25	25	19
10^{-2}	493	559	109	73	61	67	31
10^{-3}	1 237	1 783	355	265	205	175	37
10^{-4}	4 981	5 749	1 129	727	331	313	55
10^{-5}	10 258	10 264	3 493	1 567	733	591	97

由以上 3 例的对比试验可知, 本文的方法大大优于其他方法, 并且等距逼近曲线的控制顶点数不会随着误差精度的提高而急剧增长, 这在 CAD/CAM 系统中是十分重要的^[12]. 上述比较结果表明, Til 方法和 Cob 方法效果最差, 当精度要求较高时, 其等距逼近曲线的控制顶点的数量将非常多, 很不利于 CAD/CAM 系统的有效处理. Coq 方法由于考虑了曲率的影响, 所得效果稍好. Elb 方法为在 Cob 方法基础上的一种迭代修正的方法, 其改进效果不大明显.

另外, 我们还对本文的方法就曲线离散次数和误差收敛速度的关系进行了比较. 结果表明, 我们的等距逼近方法的误差收敛阶约为 $O(10^{-a})$, 其中 a 为曲线离散次数. 基曲线的次数越高, 误差收敛速度越快, 这是因为当次数较高时, Legendre 多项式最佳平方逼近的截断误差很小.

4 结 论

基于控制顶点偏移的等距曲线逼近方法具有很强的几何直观性, 操作简单, 逼近曲线的表达式与原曲线有相同的形式. 我们从分析其误差函数出发, 利用最佳平方逼近的 Legendre 多项式来逼近基曲线的法矢曲线, 计算出各控制顶点的偏移向量, 从而得到等距逼近曲线. 大量实例表明, 相对于曲线离散次数, 本方法的误差呈指数速率递缩, 等距逼近曲线收敛到精确等距曲线的速度非常快. 另外, 用 Legendre 多项式逼近法向也可以不限制其次数. 通过与其他多种方法的比较可知, 在一定误差精度下, 用本方法得到的等距逼近曲线离散次数最少, 控制顶点数最少, 大大优于其他方法, 结果十分令人满意, 具有很好的应用前景.

References:

- [1] Pham, B. Offset curves and surfaces: a brief survey. *Computer Aided Design*, 1992, 24(4): 223~229.
- [2] Maekawa, T. An overview of offset curves and surfaces. *Computer Aided Design*, 1999, 31(3): 165~173.
- [3] Elber, G., Lee, I.K., Kim, M.S. Comparing offset curve approximation methods. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1997, 17(1): 62~71.
- [4] Tiller, W., Hanson, E. Offsets of two dimensional profiles. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1984, 4(9): 36~46.
- [5] Cobb, B. Design of sculptured surfaces using the B-spline representation [Ph.D.Thesis]. Salt Lake City: Department of Computer Science, University of Utah, 1984.
- [6] Coquillart, S. Computing offset of B-spline curves. *Computer Aided Design*, 1987, 19(6): 305~309.
- [7] Elber, G., Cohen, E. Offset approximation improvement by control points perturbation. In: Lyche, T., Schumaker, L.L., eds. *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II*. New York: Academic Press, 1992. 229~237.
- [8] Klass, R. An offset spline approximation for plane cubic splines. *Computer Aided Design*, 1983, 15(5): 297~299.

- [9] Hoschek, J. Spline approximation of offset curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1988,5(1):33~40.
- [10] Pham, B. Offset approximation of uniform B-splines. *Computer Aided Design*, 1988,20(8):471~474.
- [11] Elber, G., Cohen, E. Error bounded variable distance offset operator for free form curves and surfaces. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 1991,1(1):67~78.
- [12] Piegl, L.A., Tiller, W. Computing offsets of NURBS curves and surfaces. *Computer Aided Design*, 1999,31(2):147~156.
- [13] Lee, I.K., Kim, M.S, Elber, G. Planar curve offset based on circle approximation. *Computer Aided Design*, 1996,28(8):617~630.
- [14] Shen, Xie-chang. *Implement of Optimal Polynomial Approximation*. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1984 (in Chinese).
- [15] Borwein, P., Erdelyi, T. *Polynomials and Polynomial Inequalities*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [16] Yi, Da-yi, Jiang, Shu-hao, Li, You-fa. *Numerical Methods*. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 1988 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [14] 沈燮昌. 多项式最佳逼近的实现. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.
- [16] 易大义, 蒋叔豪, 李有法. 数值方法. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1988.

Optimal Approximation to Curve Offset Based on Shifting Control Points*

LIU Li-gang, WANG Guo-jin

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

(Institute of Computer Images and Graphics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: ligang_liu@hotmail.com; wgj@math.zju.edu.cn

<http://www.zju.edu.cn>

Abstract: In this paper, an approximation approach is presented for offsetting curve by approximating the normal curve of the base curve using Legendre least-square polynomials. After computing the perturbed vectors, the offset curve can be obtained by shifting the control points of the base curve. By the comparison with other approaches based on shifting control points, such as the methods by Tiller, Cobb, Coquillart and Elber, etc., it shows that the approximated offset curve obtained by this approach has the least number of control points and the least time of subdivision for the curves. The approximated offset has the same form with the original curve. This approach is of intuition and of easy implementation. It has imposing foreground of application.

Key words: geometric modeling; curve offset; curve approximation; shifting control points; Legendre polynomial

* Received June 19, 2000; accepted August 27, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60173034; the Foundation of State Key Basic Research 973 Program under Grant No.G1998030600; the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China under Grant No.698025