

约束最优控制理论及其在气动优化中的应用¹⁾

唐智礼²⁾

(南京航空航天大学航空宇航学院空气动力学系, 南京 210016)

摘要 为了隐式地和自动地处理气动优化中的约束条件, 在 Jameson 的无约束控制论气动优化设计理论上发展了有约束的最优控制理论, 建立了约束伴随方程方法, 并将其成功地应用到了约束气动优化设计中. 比较约束伴随方法和 Jameson 的原始方法, 约束优化问题仅仅只需要修改最终伴随方程的物面边界条件和梯度的计算公式而其它项与 Jameson 原始方法中的完全相同. 这表明了基于控制理论的优化方法不仅适用于含有大量设计变量的优化问题, 而且也可以很方便地处理约束优化问题.

关键词 最优控制理论, 空气动力学, 约束优化设计, 伴随方法, 约束伴随方程

中图分类号: O224, O232, O355 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)02-0273-05

引 言

在过去十几年中, 大量的气动优化设计工作又重新回到了基于梯度的优化设计方法上, 如文献 [1~3], 而且主要集中于应用伴随变量的梯度求解方法, 这是由于该方法可以快速高效地得到目标函数的下降梯度, 计算量与设计变量数无关, 因此特别适用于含有大量设计变量的优化问题^[1], 然而却很难处理有约束的优化问题^[2,4].

Pironneau^[5] 较早地开创了应用控制理论^[6] 的形状优化设计研究, 但他的工作局限于由椭圆型方程支配的系统的优化控制理论方面; 后来 Jameson^[1] 将这一理论推广应用到了由双曲型方程支配的系统的形状优化设计中. 正如文献 [2,4] 中所讲到的, 基于控制理论的伴随方程气动优化设计方法很难处理约束条件, 但是工程上实际的优化设计都是有约束的, 比如在升力不变的条件下减小飞行器的阻力等. 文献 [2,4] 应用控制理论给出了一个约束气动优化设计方法, 其中升力等于常数的约束是通过人工地显式调整计算迎角来实现的, 也即在每个设计循环中流动方程是在通过调整迎角使得升力等于指定的常数时求解的. 这样做有 3 个方面的缺点: (1) 约束条件在设计过程中并非自动满足的; (2) 由于目标函数中包含了 C_f^α 使其变得比较复杂; (3) 在流动方程的时间迭代中需要不断地调整迎角.

本文通过引入负反馈推广和发展了 Jameson 的无约束控制论气动优化设计方法^[1], 使得约束条件在设计过程中被隐式地和自动地得到满足, 不需要任何人为地干预, 文中推导了约束伴随方程及其边界条件以及梯度的计算方法. 将 Jameson 原始的方法和本文约束伴随方法相比较, 可以发现约束的优化问题只需要略微修改伴随方程的边界条件和最终梯度的计算公式, 其它的项都保持不变, 而当撤掉约束条件时, 本文方法完全回到了 Jameson 的无约束伴随方法. 可见本文工作是对 Jameson 原始方法的发展, 同时也将伴随方法推广到了约束优化设计问题中, 使得控制论气动优化设计方法不仅适用于含有大量设计变量的优化问题, 而且适用于有约束的设计问题.

1 约束伴随方法

一个典型的约束形状优化设计问题可以定义为: 令 Ω 为 \mathbb{R}^2 或者 \mathbb{R}^3 的子空间, 寻找由设计变量 \mathbf{b} 所控制的 Ω 的边界 Γ_c , 使得下面的泛函

$$I = I(\mathbf{w}, \mathbf{b}) = \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}) d\Gamma = \langle \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), 1 \rangle_{\Gamma} \left. \begin{array}{l} \\ \text{subject to } H(\mathbf{w}, \mathbf{b})|_{\Gamma_c} = H^* \end{array} \right\} \quad (1)$$

最小(或最大), 其中 Γ 可以是 Γ_c 或 Γ_B 或 $\Gamma_c + \Gamma_B$, 见图 1. 流动变量 \mathbf{w} 定义在整个计算区域 Ω 上, 其

2006-03-07 收到第 1 稿, 2006-12-14 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10372040).

2) E-mail: tangzhili@nuaa.edu.cn

值由流动方程

$$R(\mathbf{w}, \mathbf{b})|_{\Omega} = 0 \tag{2}$$

及其边界条件 $B(\mathbf{w}, \mathbf{b})|_{\Gamma_c} = 0$ 来决定。

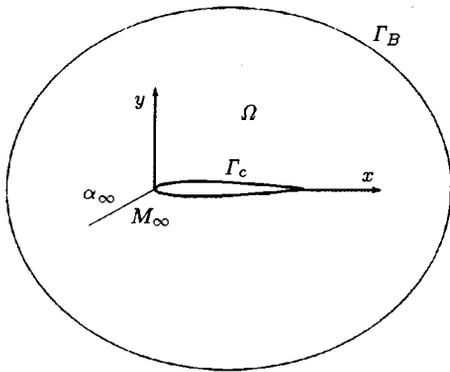


图 1 计算区域

Fig.1 Computational domain

在空气动力学中 $H(\mathbf{w}, \mathbf{b})$ 通常是一个积分形式，比如升力或者阻力等。我们假设 $H(\mathbf{w}, \mathbf{b}) = \int_{\Gamma_c} \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}) d\Gamma_c = \langle \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), 1 \rangle_{\Gamma_c}$ 。应用控制理论，引入两个伴随变量（拉格朗日乘子） Ψ, χ 以及 θ ，并且 θ 为任意正数，则上面的优化问题可以写成

$$\min I = \langle \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), 1 \rangle_{\Gamma} - \langle \Psi, R(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \rangle_{\Omega} + \langle \chi, B(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \rangle_{\Gamma_c} + \theta/2(H(\mathbf{w}, \mathbf{b}) - H^*)^2 \tag{3}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。对上式取一阶变分得到

$$\begin{aligned} \delta I = & \langle \partial_w \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} + \langle \partial_b \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma} - \\ & \langle \Psi, L(\delta \mathbf{w}) \rangle_{\Omega} - \langle \Psi, L(\delta \mathbf{b}) \rangle_{\Omega} + \\ & \langle \chi, \partial_w B(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \delta \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_c} + \langle \chi, \partial_b B(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma_c} + \\ & \theta(H(\mathbf{w}, \mathbf{b}) - H^*) \langle \partial_w \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_c} + \\ & \theta(H(\mathbf{w}, \mathbf{b}) - H^*) \langle \partial_b \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma_c} \end{aligned} \tag{4}$$

其中 L 是 R 的线性算子，即

$$L(\delta \mathbf{w}) + L(\delta \mathbf{b}) = (\partial R / \partial \mathbf{w}) \delta \mathbf{w} + (\partial R / \partial \mathbf{b}) \delta \mathbf{b} \tag{5}$$

对于 EULER 方程的守恒算子 R ，线性算子 $L(\mathbf{w}) = A \partial_x \mathbf{w} + B \partial_y \mathbf{w}$ ，应用高斯定理我们得到

$$\langle \Psi, L(\delta \mathbf{w}) \rangle_{\Omega} = \left\langle L_n^T \Psi, \delta \mathbf{w} \right\rangle_{\Gamma_B + \Gamma_c} - \left\langle L^T \Psi, \delta \mathbf{w} \right\rangle_{\Omega} \tag{6}$$

其中 $L_n = A n_x + B n_y$ 为空间算子 L 在边界上的投影， (n_x, n_y) 为单位外法向量。于是目标函数的一阶

变分成为

$$\begin{aligned} \delta I = & \langle \partial_w \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} + \langle \partial_b \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma} - \\ & \left\langle L_n^T \Psi, \delta \mathbf{w} \right\rangle_{\Gamma_B} - \left\langle L_n^T \Psi, \delta \mathbf{w} \right\rangle_{\Gamma_c} + \left\langle L^T \Psi, \delta \mathbf{w} \right\rangle_{\Omega} + \\ & \langle \chi, \partial_w B(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \delta \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_c} + \langle \chi, \partial_b B(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma_c} + \\ & \theta(H(\mathbf{w}, \mathbf{b}) - H^*) \langle \partial_w \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_c} - \\ & \langle \Psi, L(\delta \mathbf{b}) \rangle_{\Omega} + \theta(H(\mathbf{w}, \mathbf{b}) - H^*) \langle \partial_b \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma_c} \end{aligned} \tag{7}$$

为了在设计过程中去掉过多的流动计算，应用控制理论将所有含有 $\delta \mathbf{w}$ 的项抵消掉，于是需要求解下面的方程组

$$\left. \begin{aligned} L^T(\Psi)|_{\Omega} &= 0 \\ L_n^T \Psi|_{\Gamma_B} &= \partial_w \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \\ L_n^T \Psi|_{\Gamma_c} &= \chi \partial_w B(\mathbf{w}, \mathbf{b}) + \partial_w \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}) + \\ & \theta(H - H^*) \partial_w \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

于是目标函数的变分最终成为

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[\langle \partial_b \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma} - \langle \Psi, L(\delta \mathbf{b}) \rangle_{\Omega} + \right. \\ & \langle \chi, \partial_b B(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma_c} + \\ & \left. \theta(H - H^*) \langle \partial_b \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), \delta \mathbf{b} \rangle_{\Gamma_c} = \right. \\ & \left. G_{\text{rad}}^T \delta \mathbf{b} \right] \end{aligned} \tag{9}$$

其中 G_{rad} 为目标函数的梯度，梯度的转置为

$$\begin{aligned} G_{\text{rad}}^T = & \langle \chi \partial_b B(\mathbf{w}, \mathbf{b}) + \theta(H - H^*) \partial_b \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), 1 \rangle_{\Gamma_c} + \\ & \langle \partial_b \phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}), 1 \rangle_{\Gamma} - \langle \Psi, \partial R / \partial \mathbf{b} \rangle_{\Omega} \end{aligned} \tag{10}$$

一旦梯度确定以后我们就可以选择合适的下降算法，得到一个新的改进。将上面的结果与 Jameson 的无约束控制论优化算法相比较，可以看到当存在约束条件时只需要修改伴随方程的物面边界条件和最终梯度的计算公式，而当撤掉约束条件时本文方法完全回到了 Jameson 原始的方法。

2 在实际优化问题中的应用

我们考虑下面的约束气动优化设计问题

$$\left. \begin{aligned} \min I = & \Omega_1/2 \int_c (p - p_d)^2 ds + \Omega_2 C_d \\ \text{subject to} & C_l = C_l^* \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

这里 Ω_1 和 Ω_2 为任意的正数。而且设计过程中我们保持 M_{∞} 和 α 不变。在图 1 所示的坐标系下，翼型

的升力和阻力系数为

$$\begin{aligned} C_l &= C_y \cos(\alpha) - C_x \sin(\alpha) \\ C_d &= C_x \cos(\alpha) + C_y \sin(\alpha) \\ C_x &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2 \bar{C}} \int_{\Gamma_c} \frac{p}{p_\infty} n_x ds \\ C_y &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2 \bar{C}} \int_{\Gamma_c} \frac{p}{p_\infty} n_y ds \end{aligned}$$

其中 C_x 和 C_y 分别为 x, y 方向的气动力系数, \bar{C} 为参考长度. 所以在此问题中

$$\begin{aligned} \phi(w, b) &= \frac{\Omega_1}{2} (p - p_d)^2 + \\ &\quad \frac{2\Omega_2}{\gamma M_\infty^2 \bar{C}} \frac{p}{p_\infty} (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) \\ \varphi(w, b) &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2 \bar{C}} \frac{p}{p_\infty} (n_y \cos \alpha - n_x \sin \alpha) \end{aligned}$$

假设流场控制方程及其边界条件为二维 Euler 方程

$$\left. \begin{aligned} \partial w / \partial t + \partial f / \partial x + \partial g / \partial y &= 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \rho V n &= 0, & \text{在 } \Gamma_c \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

所以线性化算子 $L(\delta w) = (A\delta_x + B\delta_y)\delta w$, 其中 $A = \partial f / \partial w$, $B = \partial g / \partial w$, 投影算子 $L_n = An_x + Bn_y$, (n_x, n_y) 为边界的单位外法向量. 于是伴随方程 $L^T(\Psi) = 0$ 就可以写成 $\Psi_t - A^T \Psi_x - B^T \Psi_y = 0$, 将其写在曲线坐标系下为 $\Psi_t - C_1^T \Psi_\xi - C_2^T \Psi_\eta = 0$, 其中 $C_1^T = A^T \xi_x + B^T \xi_y$, $C_2^T = A^T \eta_x + B^T \eta_y$. 由于 $\phi(w, b)$ 是定义在 Γ_c 上的, 所以根据式 (8) 伴随方程的远场边界条件为

$$(A^T \eta_x / J + B^T \eta_y / J) \Psi = 0 \quad (13)$$

再根据式 (8), 可以得到伴随方程的物面边界条件为

$$\psi_2 n_x + \psi_3 n_y = h_1 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \Omega_1 (p - p_d) - \frac{2\Omega_2}{\gamma M_\infty^2 \bar{C}} \left(\frac{\eta_x}{J} \cos \alpha + \frac{\eta_y}{J} \sin \alpha \right) - \\ &\quad \frac{2\theta(C_l - C_l^*)}{\gamma M_\infty^2 \bar{C}} \left(\frac{\eta_y}{J} \cos \alpha - \frac{\eta_x}{J} \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\chi = \psi_1 + u\psi_2 + v\psi_3 + h/\rho\psi_4 \quad (15)$$

于是约束优化问题的伴随方程成为

$$\left. \begin{aligned} \Psi_t - C_1^T \Psi_\xi - C_2^T \Psi_\eta &= 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ C_2^T \Psi &= 0, & \text{在 } \Gamma_B \text{ 上} \\ \psi_2 \frac{\eta_x}{J} + \psi_3 \frac{\eta_y}{J} &= -h_1, & \text{在 } \Gamma_c \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

根据式 (10), 梯度可以写成

$$\begin{aligned} G_{\text{rad}}^T &= \langle \chi \partial_b B(w, b), 1 \rangle_{\Gamma_c} + \\ &\quad \theta(C_l - C_l^*) \langle \partial_b \phi(w, b), 1 \rangle_{\Gamma_c} + \\ &\quad \langle \partial_b \phi(w, b), 1 \rangle_{\Gamma_c} - \langle \Psi, \partial R / \partial b \rangle_\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi, \frac{\partial R}{\partial b} \right\rangle_\Omega &= \left\{ \int_\Omega \Psi^T \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta \left(\frac{\xi_x}{J} \right) f + \delta \left(\frac{\xi_y}{J} \right) g \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\delta \left(\frac{\eta_x}{J} \right) f + \delta \left(\frac{\eta_y}{J} \right) g \right] \right\} d\xi d\eta \right\} / (\delta b) \\ &\quad - \int_{\Gamma_c} \Psi^T \left[\delta \left(\frac{\eta_x}{J} \right) \bar{f} + \delta \left(\frac{\eta_y}{J} \right) \bar{g} \right] d\xi \\ \langle \chi \partial_b B(w, b), 1 \rangle_{\Gamma_c} &= \frac{\int_{\Gamma_c} \Psi^T \left[\delta \left(\frac{\eta_x}{J} \right) \bar{f} + \delta \left(\frac{\eta_y}{J} \right) \bar{g} \right] d\xi}{\delta b} \end{aligned}$$

(ξ, η) 为曲线坐标网格, \bar{f} 和 \bar{g} 为 f 和 g 中去掉压力项的部分. 一旦给定翼型的参数化后, 就可以按照式 (17) 计算目标函数的下降梯度, 从而得到一个新的改进.

3 几何约束处理

文中翼型的参数化为 Hicks-Henne 函数, 上下表面分别用 14 个基函数来表达^[7], 设计变量就是基函数的系数 $b_i^u, b_i^l, i = 1, \dots, 14$, 即

$$\begin{aligned} y^u &= y_{\text{old}}^u + \sum_{i=1}^{14} b_i^u f_i(x) \\ y^l &= y_{\text{old}}^l + \sum_{i=1}^{14} b_i^l f_i(x) \end{aligned}$$

设计过程中, 要求最大厚度位置 x_0 不变, 于是厚度等于常数的约束就要求设计过程满足下面关系式

$$\sum_{i=1}^{14} (b_i^u - b_i^l) f_i(x_0) = 0 \quad (18)$$

而翼型截面积等于常数要求

$$\sum_{i=1}^{14} (b_i^u - b_i^l) \int f_i(x) dx = 0 \quad (19)$$

这两个约束条件可以应用第 1 节所述的方法进行处理, 只不过它不改变伴随方程的边界条件而只改变梯度的计算公式, 因为它们的表达式中不包含任何流场变量.

4 优化算例和结果

将上面给出的优化算法应用于实际的优化问题

中. 流动方程和伴随方程都是在 128×38 的 O -型网格上求解的. 本节共给出了下面 4 种约束优化算例:

- 算例 1: 升力不变的阻力最小化;
- 算例 2: 升力和厚度不变的阻力最小化;
- 算例 3: 升力和翼型截面积不变的阻力最小化;
- 算例 4: 升力、翼型厚度和截面积不变的阻力最小化.

其中式 (11) 中的 $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = 1.0, C_l^* = C_l^{initial}$, 优化的初始翼型为 NACA2412 翼型, 设计状态为 $M_\infty = 0.75, \alpha = -0.106^\circ$.

表 1 给出了上面 4 种组合约束条件下的最优翼型的性能, 可见在优化过程中所有的约束条件都被准确地满足. 图 2 给出了优化翼型表面的压力分布, 表明了优化翼型在各种约束条件都满足的情况下表面的激波确实得到了削弱, 达到了减阻的目的. 图 3 给出了优化过程中升力约束条件和目标函数的收敛历史, 表明整个设计过程中阻力系数不断减小的同时而约束条件保持不变.

表 1 优化翼型和初始翼型的性能

Table 1 Airfoil performance of initial and optimized profiles

	Initial airfoil	Design case 1	Design case 2	Design case 3	Design case 4
C_d	0.01054	0.00113	0.00160	0.00121	0.00207
C_l	0.45050	<u>0.44933</u>	<u>0.44856</u>	<u>0.44917</u>	<u>0.44815</u>
thickness	12.09	10.90	<u>12.08</u>	11.50	<u>12.06</u>
contain area	823.17	776.55	848.80	<u>823.09</u>	<u>823.82</u>

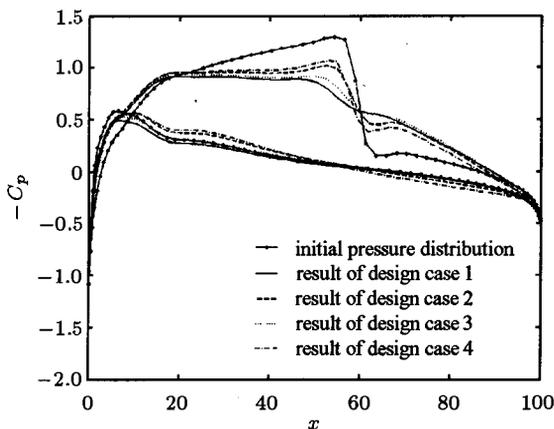


图 2 优化翼型表面的压力分布

Fig.2 Pressure distributions on optimized airfoils

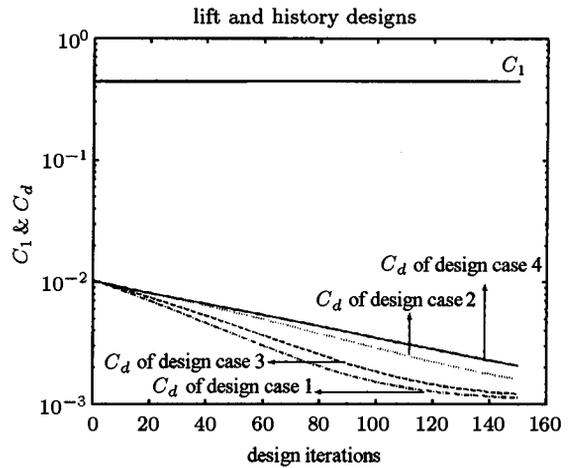


图 3 设计过程的升力和阻力收敛历史

Fig.3 Lift and drag history of design procedure

5 结 论

本文在基于控制论的优化设计理论框架下推广和发展了 Jameson 的无约束气动优化设计方法, 通过引入一个负反馈建立了新的约束伴随方法, 推导了相应的约束伴随方程及梯度计算公式. 本文方法中所有的约束条件, 诸如固定升力、固定厚度和翼型截面积等, 都在设计过程中被自动地和隐式地满足, 而不需要任何人为显式地干预. 而且当撤掉约束条件时本文方法自动恢复到了 Jameson 的原始无约束优化方法.

参 考 文 献

- 1 Jameson A. Aerodynamic design via control theory. *J Sci Comput*, 1988, 3(3): 233~260
- 2 Reuther J, Jameson A, Alonso JJ, et al. Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers. Part 1. *J of Aircraft*, 1999, 36(1): 51~60
- 3 Reuther J, Jameson A. Control Theory Based Airfoil Design Using the Euler Equations. AIAA 94-4272 Cp, 1999
- 4 Hyoungh JK, Shigern DS, Baysal O, et al. Aerodynamic optimization of supersonic transport wing using unstructured adjoint method. *AIAA J*, 2001, 39(6): 1011~1020
- 5 Pironneau O. Optimal Shape Design for Elliptic Systems. New York: Springer-Verlag, 1984
- 6 Lions JL. Controle Optimal des Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1969
- 7 Tang ZL. Multi-objective optimization strategies using adjoint method and game theory in aerodynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22(4): 307~314

CONSTRAINED OPTIMUM CONTROL THEORY: APPLICATION TO AERODYNAMIC DESIGN¹⁾

Tang Zhili²⁾

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract The constrained optimum aerodynamic design method is developed in the framework of control theory in order to implement all the constraints implicitly and automatically. With the constrained adjoint method developed in this paper, only the boundary condition of adjoint equations and the gradient computation need to be modified slightly as compared with Jameson's original unconstrained formula, other terms are maintained the same. It turns out that the control theory based optimization method is very suitable not only for the designs with a large number of design variables but also for the designs with constraints.

Key words optimum control theory, aerodynamics, constrained optimization, adjoint methods, constrained adjoint equations

Received 7 March 2006, revised 14 December 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10372040).

2) E-mail: tangzhili@nuaa.edu.cn